جامعة تكريت

كلية الادارة والاقتصاد

قسم الاقتصاد

المرحلة الرابعة

المادة بحوث العمليات

الكورس الاول

مدرس المادة : أ.م.د ابراهيم عبدالله جاسم

مقدمة في بحوث العمليات

اولاً: نشأت علم بحوث العمليات

تعد بحوث العمليات من العوم التطبيقية الحديثة التي أحرز تطبيقها نجاحا واسع في المجالات المدنية والعسكرية على حد سواء ، وقد تشكل اول عنصر تنظيمي لبحوث العمليات خلال الحرب العالمية الثانية ، حيث ظهرت العديد من المشاكل التعبوية والسوقية لقوات الحلفاء وكان يصعب الحصول على حلول لتلك المشكلات من قبل جهة معينة ذات اختصاص واحد ولذلك قررت القيادة العامة لقوت الحلفاء تشكيل أول مجموعة استشارية مختلطة تضم عدد من العلماء الاختصاصيين للتعاون وتقديم المشورة لقيادة القوات المسلحة . وقد سميت هذه المجموعة الاستشارية بفريق بحوث العمليات (Operational Research) وقد تألف المجموعة الاستشارية من فريقين هما :

1-فريق بحوث العمليات العسكرية في الجيش البريطاني عام 1941 يشمل متخصصين في الرياضيات والهندسة والحاسب الالي.
2-فريق بحوث العمليات العسكرية في الجيش الامريكي اختص في بعض التطبيقات العسكرية .

وكان هدف الفرق الاستشارية هو:

-تحديد حجم الاساطيل العسكرية.

-التحكم بمضادات الطائرات.

-تحديد مواقع غواصات الاعداء في المحيط.

- دراسة الوضع العسكري لقوات الحلفاء وتقديم الاساليب العلمية لتحركات القوات المعادية ولا نزال اقصى الضربات فيها

ويعود سبب نجاح لجنة بحوث العمليات الى اسباب عديدة منها

- أن اللجنة تضم مختلف الاختصاصات

- الضغط الناجم من الحرب لإيجاد الحلول بأقصر وقت ممكن

وبعد انتهاء الحرب العالمية الثانية عاد معظم العلماء الاختصاصيين في لجان بحوث العمليات الى الحياة المدنية محاولين تطبيق بحوث العمليات لمشكلات مدنية مشابهة وقامت بتدريسها الجامعات واستفادت من تطبيقات شركات صناعية كثيرة . ومن اوائل تطبيقات العمليات كانت في المؤسسات الكبيرة ذات الأرباح المالية ، حيث تم استخدامها من قبل الشركات النفطية من خلال تطبيق أسلوب البرمجة الخطية في تخطيط الإنتاج و بأوسع المستويات ، كما استفادت من تطبيقات بحوث العمليات مصانع البتروكيمياويات اضافة الى المجالات التي تتطلب اتخاذ قرارات تستند الى أسس علمية .وقد كان للتطور في مجال الحاسبات الالكترونية من العوامل المهمة التي ساعدت اختصاصي بحوث العمليات في حل المشاكل المعقدة حيث ساعد تطور الحاسبات الالكترونية الباحثين في تنفيذ التحليلات والدراسات المطلوبة بسرعة فائقة .

ثانياً: تعريف بحوث العمليات

هناك عدة تعاريف لبحوث العمليات منها:

-تعريف الجمعية البريطانية : هو تطبيق الطرق العلمية المعتمدة على بناء النماذج المؤكدة والاحتمالية لحل المشاكل المعقدة التي تنشأ عند تشغيل وادارة النظم الصناعية او التجارية او المدنية او العسكرية والمشتملة على الانسان والآلات والمواد الخام والاموال .

–تعريف الجمعية الامريكية : ايجاد الطرق العلمية المثلى لتصميم وتشغيل النظم المشتملة على الانسان والآلات وفق قيود معينة من الثروات .

اذاً بحوث العمليات هو علم يستخدم أساليباً وطرقاً علمية لدراسة مشكلات واقعية، ثم توفير أكثر من حل لها، واختيار الحل الأمثل ضمن الإمكانات المتاحة. وهذا العلم ينتمي للرياضيات التطبيقية، وله أسماء أخرى مثل البرمجة الرياضية، وعلم القرار، وتحليل النظم، والهندسة المالية، وهندسة التسويق، لكن أفضلها هو بحوث العمليات لأنه يشمل كل المجالات السابقة بالإضافة إلى غيرها من المجالات الأخرى. وهذا العلم يهتم بتحسين أو اختيار عمليات وطرق معينة بهدف الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة بأقل وقت وجهد وتكلفة ممكنة وبأقصى ربح ممكن، وامتدت تطبيقات بحوث العمليات لعدة مجالات مثل الهندسة، والصناعة، والعلوم الاقتصادية والإدارية والتسويقية ، والنقل، والمواصلات، والتسويق، والمجال العسكري، والكثير من المجالات الأخرى، وهناك أساليب كثيرة تعتمد عليها بحوث العمليات مثل تصميم النماذج الرياضية، والبرمجة الخطية، والبرمجة الشبكية، والتحليل الإحصائي، لاتخاذ القرار والوصول للحل الأمثل، وتتطلب بحوث العمليات الإلمام بالعديد من العلوم الرياضية مثل معركة الحساب باستخدام المصفوفات وعلم الاحتمال وغيرها.

ثالثاً: خصائص بحوث العمليات

- تتعلق بالمشاكل المرتبطة بتنفيذ وتنظيم عمليات وانشطة المنشاة .
- عدم ارتباطها بمجال تطبيق واحد .
- تحتوي على عناصر الابداع.
- ايجاد افضل الحلول الممكنة .

رابعاً: المراحل الاساسية لبحوث العمليات في معالجة المشاكل

1: صياغة المشكلة قيد البحث : تتطلب صياغة المشكلة ادراكاً واسعا بالمشكلة وما يحيط بها من عوامل ومؤثرات مختلفة ومن أجل صياغة المشكلة يجب تحديد ما يلي :

أ- **الأهداف** : تختلف طبيعة المشاكل في الحياة العملية اختلافا واسعا وقلما يحدث تشابه بين مشكلتين في مؤسستين مختلفتين ولذلك فان الالمام الواسع بالأهداف المطلوبة أمر ضروري . وقد يكون الهدف المطلوب زياده الانتاج في مصنع ما ، او زيادة تحصينات قوة معينة ضد قوة خارجية أو تقليل التكاليف او تعظيم الأرباح.

ب- **البدائل** : في حالة دراسة مشكلة معينة فان هناك عدة طرق للعمل وان معيار التقييم لطرق العمل المختلفة سيكون اعلى مقياس للكفاءة حيث يمك قياس الكفاءة بالربح أو الكلفة او عدد الوحدات أو الوقت ... الخ . ويستخدم مقياس الكفاءة في تقييم بدائل العمل الممكنة .

ج- **القيود** : لكل مشكلة محددات كالأموال ، والمعدات ، والمواد الأولية . والوقت والقوى العاملة ... الخ ولهذا فان الحل المقبول يجب أن يتعايش مع القيود التي فرضتها الموارد المتيسرة .

2 :عمل نموذج للمشكلة : ان عمل نموذج هو عبارة عن عملية تمثيل المكونات المشكلة والعوامل المؤثرة والظروف المحيطة وأسلوب الربط بينها حيث ان تمثيل المشكلة على صيغة أو شكل نموذج يساعد في فهمها ولذلك فان

عملية وضع نموذج هي وسيلة فعالة للتوصل الى قرار سليم . توجد عدة نماذج ومن أهم هذه النماذج :

أ- النموذج الرياضي : النموذج الرياضي عبارة عن مجموعة من المعادلات التي تصف منظومة معينة ويتكون النموذج الرياضي من نوعين من المعادلات : هي دالة الهدف والقيود

ب- النموذج الفيزيائي : هو نموذج يحاكي الأصل الذي يمثله وهو نسخة مصغرة او مكبرة من المواصفات الأساسية لذلك الشيء . فالكرة مثلا نموذج مصغر لشكل الكرة الأرضية .

ت- النموذج التنظيمي : عبارة عن مخطط يوضح العلاقات المتداخلة بين مختلف الأعمال في مصنع ، او شركة ما .

يتم التركيز في هذا المنهج فقط على النموذج الرياضي

3 - ايجاد حل للنموذج :

بعد صباغة المشكلة على شكل نموذج رياضي فان المرحلة التالية هي محاولة الحصول على حل للمشكلة من النموذج الممثل لها .

4: اختبار النموذج والحل المستخرج منه :

يتضح مما سبق أن أي نموذج يعتبر تمثيلا للواقع ويمكن اختبار قدرة النموذج من خلال إمكانيته في ابراز تأثير التغيير في النظام • ومما تجدر الإشارة إليه هنا أن وضع حل النموذج لا يعني بالضرورة وضع حل للمشكلة . يختبر النموذج باستخدام بيانات تاريخية (وذلك باستعادة احداث ماضية واختبارها) وقد يتطلب الأمر تحوير النموذج وأعاده اختباره إلى أن تزول بعض النواقص الموجودة .

5- وضع رقابة على حل : بعد أن يتم قبول النموذج والحل الناجم عنه فان الأمر يتطلب وضع رقابة على الحل وهذه الرقابة يجب ان تكون على هيئة معينة بحيث يتم اكتشاف أي خطأ واضح ضمن الظروف والتحديات المحيطة بالنموذج اذا تغيرت الظروف المحيطة بالمشكلة بصورة لا تسمح للنموذج بتمثيل المنظومة فان النموذج يصبح باطل المفعول .

6 : تطبيق الحل : أن تطبيق الحل ببساطة تنفيذه وترجمته إلى أساليب عمل ومراقبته عن كثب وتقديمه الى الجهات المختصة بشكل و اضح .

صياغة نموذج البرمجة الخطية :

ان كلمة (برمجة لا تعني البرمجة في الحاسبات الالكترونية ، انما هي مرادفة لمفهوم التخطيط ، أي اعتماد افضل حل ممكن لمشاكل الزيادة الكبيرة في الموارد وكيفية توزيعها ضمن محددات . اما (خطية) فتعني أن العلاقات التي تربط المتغيرات هي من الدرجة الأولى.

يعود استخدام البرمجة الى العالم السوفيتي Lenitief سنة 1920 وقد طور الرياضي الامريكي Dantzig .G طرق الحل سنة 1997 ، وزاد استخدامها مع تطور استخدام الحاسبات الالكترونية وبرمجة تطبيقات جاهزة لذلك الغرض (مثل : QSB) .

تعرف البرمجة الخطية بانها اسلوب رياضي يستخدم لتحديد افضل توزيع للموارد (العمال ، المكائن ، المواد الأولية ، ساعات العمل) في الشركة لتحقيق هدفها سواء كان تقليل التكاليف او تعظيم الارباح . يكون ذلك بالاعتماد على اساليب رياضية تستخدم في حل المشاكل الصناعية والزراعية والصحية وحتى العسكرية .

تتطلب صياغة مشكلة البرمجة الخطية فهم وتحديد الاتي .

اولا : تحديد دالة الهدف Objective Function : وهو الهدف المنشود الذي ترغب في تحقيقه وامكانية التعبير عن هذا الهدف في صورة دالة خطية Liner Function والحصول على قيمة رقمية له ومحاولة تعظيم هذه القيمة وايجاد النهاية العظمى لها عندما تكون الدالة Maximum (أي عندما يكون الهدف من المشكلة تعظيم الربح او العوائد) او محاولة التدنية عندما تكون الدالة Minimum (أي

عندما يكون الهدف من المشكلة تقليل التكليف) الأرقم التي تقع بجانب المتغيرات تمثل ربح الوحدة الواحدة او تكلفة الوحدة الواحدة من المتغير (X) .

ثانيا : تحديد المتغيرات Variables : يرمز للمتغيرات برمز معين في الغالب الرمز (x) ، اذ يمثل المتغير في الغالب المنتجات التي تنتجها شركا ما ، فيمثل X_1 المنتج الأول ، و X_2 المتغير الثاني وهكذا .

ثالثا : تحديد القيود constraints : يمثل القيد العلاقة الخطية بين المتغيرات (على سبيل المثال : المنتجات) والامكانيات المتاحة للشركة (على سبيل المثال : المواد الأولية) ، وهي توضح ما تحتاجه كل وحدة انتاج من الموارد المتاحة .

رابعا : شرط عدم السلبية Non–Negativity الذي يؤكد على أن تكون المتغيرات (المنتجات) قيم موجبة او صفر وعدم امكانية أن تكون سالبة بغض النظر عن نوع الدالة .

مثال1 : نفترض ان احدى الشركات تقوم بإنتاج نوعين المنتجات هما نوع (A) و (B) حيث تتوفر لدى ادارة الشركة (40) ساعة عمل فقط . وان عملية انتاج منتج واحدة تتطلب المرور بماكنتين هما ماكنة (1) وماكنة (2) والجدول الاتي يبين الزمن بالساعات المطلوبة للوحدة الواحة لكل منتج وكذلك الربح المتحقق من الوحدة الواحدة والزمن الكلي المتاح للعمليات الانتاجية.

ربح الوحدة الواحدة	الزمن المطلوب لكل وحدة منتجة		المنتجات
	ماكنة2	ماكنة1	
10	0.2	0.6	A
12	0.4	0.3	B
	40	40	الزمن المتاح

وبافتراض توفر المواد الاولية والايدي العاملة فان عامل الوقت هو العامل المهم في هذه الحالة من خلال تحديد الوقت ب(40) ساعة عمل اسبوعيا .

المطلوب : صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أعلى ربح ممكن .

الحل :

اولاً : تمثل المتغيرات المنتجات ، وبالتالي فان عدد المتغيرات سيكون اثنان (X_1 , X_2) . نفترض الاتي:

أن عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من المنتج الاول = X_1

أن عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من المنتج الثاني = X_2

ثانيا : نوع دالة الهدف في هذا المثال (ربح) اي تعظيم وبالتالي Maximum ، وان الأرقام التي ستوضع أمام كل متغير في دالة الهدف تمثل ربح الوحدة الواحدة لكل منتج . وبالتي يمكن صياغة دالة الهدف بالشكل الاتي :

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 12X_2$$

ثالثا : القيود هنا تمثل العمليتان (1 , 2) ، بالتالي فان العملية ماكنة1 تمثل القيد الأول ، والعملية ماكنة 2 تمثل القيد الثاني . بالتالي :

1-**القيد الأول** : الزمن المتاح هو (40) ساعة عمل (ليس بالضرورة استغلاله كله لكن لا يمكن استغلال قدر اكبر منه) ، وان وحد الواحدة من المنتج الأول تحتاج الى(0.6) ساعة والوحدة الواحدة من المنتج الثاني تحتاج الى (0.3) ساعة وعليه يمكن صياغة القيد الأول بالشكل الاتي:

$$0.6X_1 + 0.3X_2 \leq 40$$

2-**القيد الثاني** : الزمن المتاح هو 40 دقيقة يوميا (ليس بالضرورة استغلاله كله لكن لا يمكن استغلال قدر اكبر منه) ، وان الوحد الواحدة من المنتج الأول تحتاج الى(0.2) ساعة والوحدة الواحدة من المنتج الثاني تحتاج الى (0.4)ساعة. وعليه يمكن صياغة القيد الثاني بالشكل الاتي :

$$0.2\,X_1 + 0.4X_2 \leq 40$$

رابعاً : قيد عدم السلبية يشير إلى أن كل متغير (منتج) اما ينتج بعدد معين من الوحدات وبالتالي قيمته اكبر من 0 ، أو لا ينتج نهائية وبالتالي قيمته = 0 ، وهذا يعني عدم امكانية ان يكون المتغير سالب (اقل من 0).

ويكتب القيد بالشكل الاتي بغض النظر عن نوع الدالة تعظيم او تدنية

$$X_1\ ,\ X_2\ \geq 0$$

بالنهاية يكون نموذج البرمجة الخطية لهذا المثال بالشكل الاتي

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 12X_2$$

S.T تؤدي الى

$$0.6X_1+0.3X_2\leq 40$$

$$0.2X_1+0.4X_2\leq 40$$

$$X_1,X_2 \geq 0$$

يطلق على الصيغة اعلاه بالبرمجة الخطية .

مثال2 :تقوم شركة بإنتاج نوعين من التلفزيونات بمرحلتين فاذا كان عدد الساعات اللازمة لإنتاج تلفزيون واحد من النوعين حسب الجدول الاتي :

المنتجات	الزمن المطلوب لكل وحدة منتجة بالساعات	
	المرحلة1	المرحلة2
TV (A)	4	3
TV (B)	6	7
الزمن المتاح	1400	1800

المطلوب : ايجاد استخرج قيمة البرمجة الخطية اذا علمت ان ربح التلفزيون الاول (A) هو (1000) وربح التلفزيون الثاني (B) هو(1500)

الحل :

اولاً : تمثل المتغيرات المنتجات ، وبالتالي فان عدد المتغيرات سيكون اثنان (X_1 , X_2 ,) . نفترض الاتي:

أن عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من المنتج الاول = X_1

أن عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من المنتج الثاني = X_2

ثانيا : نوع دالة الهدف في هذا المثال (ربح) اي تعظيم وبالتالي Maximum ، وان الأرقام التي ستوضع أمام كل متغير في دالة الهدف تمثل ربح الوحدة الواحدة لكل منتج . وبالتي يمكن صياغة دالة الهدف بالشكل الاتي :

$$\text{Max } Z = 1000X_1 + 1500X_2$$

ثالثا : القيود هنا تمثل المرحلتين (المرحلة1 ، المرحلة 2) ، بالتالي فان المرحلة1 تمثل القيد الأول ، والمرحلة2 تمثل القيد الثاني . بالتالي :

3- **القيد الأول** : الزمن المتاح هو (1400) ساعة عمل (ليس بالضرورة استغلاله كله لكن لا يمكن استغلال قدر اكبر منه) ، وان التلفزيون الواحدة من النوع الأول تحتاج الى(4) ساعة والتلفزيون الواحدة من النوع الثاني تحتاج الى (6) ساعة وعليه يمكن صياغة القيد الأول بالشكل الاتي:

$$4X_1 \ 6X_2 \ \leq 1400$$

4- **القيد الثاني** : الزمن المتاح هو(1800) ساعة (ليس بالضرورة استغلاله كله لكن لا يمكن استغلال قدر اكبر منه) ، وان التلفزيون الواحدة من النوع الأول يحتاج الى(3) ساعة التلفزيون الواحدة من النوع الثاني يحتاج الى (7)ساعة. وعليه يمكن صياغة القيد الثاني بالشكل الاتي :

$$3\,X_1 + 7X_2 \leq 1800$$

رابعاً : قيد عدم السلبية يشير إلى أن كل متغير (منتج) اما ينتج بعدد معين من الوحدات وبالتالي قيمته اكبر من 0 ، أو لا ينتج نهائية وبالتالي قيمته = 0 ، وهذا يعني عدم امكانية ان يكون المتغير سالب (اقل من 0).

ويكتب القيد بالشكل الاتي بغض النظر عن نوع الدالة تعظيم او تدنية

$$X_1 \, , X_2 \ \geq 0$$

بالنهاية يكون نموذج البرجمة الخطية لهذا المثال بالشكل الاتي

$$Max\ Z = 1000X_1 + 1500X_2$$

S.T تؤدي الى

$$4X_1+6X_2\leq1400$$

$$3X_1+7X_2\leq1800$$

$$X_1,X_2 \geq0$$

يطلق على الصيغة اعلاه بالبرمجة الخطية .

تمرين 1 واجب : تقوم احدى الشركة العراقية بإنتاج نوعين من السجاد هما (A) و(B) اذ تتطلب عملية انتاج سجادة واحدة المرور بثلاث مكائن هي ماكنة(1) للتقطيع وماكنة(2) للطي وماكنة (3) للتغليف والجدول الاتي يبين الزمن بالدقائق المطلوب للوحدة الواحدة لكل منتج من العمليات المختلفة وكذلك الربح المتحقق من الوحدة الواحدة والزمن الكلي المتاح للعمليات الثلاثة .

الزمن المتاح	الزمن المطلوب لكل وحدة منتجة		العمليات
	منتج B	منتج A	
2200	3	2	ماكنة1
1800	2	0	ماكنة2
400	0	6	ماكنة3
	12	12	ربح الوحدة الواحدة

المطلوب: المطلوب صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أعلى ربح ممكن

الحل /

$$Max\ Z = 12X1 + 12X2$$

S .T

$$2X1 + 3X2 \leq 2200$$

$$2X2 \leq 1800$$

$$6X1 \leq 400$$

$$X1 ,X2 \geq 0$$

تمرين 2واجب:يمتلك مزارع ارض زراعية مقدارها (200) دونم ويرغب بزراعتها بنوعين من المحاصيل هما (A) و(B) ، فاذا علمت ان انتاج الدونم الواحد من المحصول (A) هو (60) كيلو غرام ومن المحصول (B) هو (80) كيلو غرام واذا علمت ان زراعة الدونم الواحد من المحصول (A)يكلف (1) يوم عمل و(200) دينار من رأس المال ، في حين تكلف زراعة الدونم من (B) (10) يوم و(400) دينار من رأس المال .

علما ان

عدد ايام العمل المتاحة (300) يوم

قيمة رأس المال المتاح (10000) دينار

المطلوب : اوجد صيغة البرمجة الخطية التي تحقق للمزارع اكبر انتاج ممكن .

الحل

$$\text{Max } Z = 60X_1 + 80X_2$$

S .T

$$X1 + 10X2 \leq 300$$

$$200X1 + 400X2 \leq 10000$$

$$X1 + X2 \leq 200$$

$$X1 , X2 \geq 0$$

مثال 3 : احدى الشركات الصناعية تقوم بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات 1و 2 و 3 وترغب في تحديد عدد الوحدات التي يجب انتاجها يوميا من كل منتج بحيث تحصل على أكبر ربح ممكن . يتطلب انتاج الوحدة الأولى من كل منتج المرور على ثلاثة عمليات انتاجية (A , B , C) والجدول الاتي يبين الزمن بالدقائق المطلوب للوحدة الواحدة لكل منتج من العمليات المختلفة وكذلك الربح المتحقق من الوحدة الواحدة والزمن الكلي المتاح للعمليات الثلاثة .

المطلوب صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أعلى ربح ممكن .

العمليات	الزمن المطلوب لكل وحدة منتجة من المنتجات الثلاثة لكل عملية			الزمن المتاح
	منتج1	منتج2	منتج3	
A	2	2	3	420
B	5	0	2	440
C	3	6	0	465
ربح الوحدة الواحدة	5	4	7	

الحل :

اولاً : تمثل المتغيرات المنتجات ، وبالتالي فان عدد المتغيرات سيكون ثلاثة (X_1 , X_2 , X_3) . نفترض الاتي:

أن عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من المنتج الاول = X_1

أن عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من المنتج الثاني = X_2

أن عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من المنتج الثالث = X_3

ثانيا : نوع دالة الهدف في هذا المثال (ربح) اي تعظيم وبالتالي Maximum ، وان الأرقام التي ستوضع أمام كل متغير في دالة الهدف تمثل ربح الوحدة الواحدة لكل منتج . وبالتي يمكن صياغة دالة الهدف بالشكل الاتي :

$$\textbf{Max } Z = 5X_1 + 4X_2 + 7X_3$$

ثالثا : القيود هنا تمثل العمليات الثلاثة (C , B , A) ، بالتالي فان العملية A تمثل القيد الأول ، والعملية B تمثل القيد الثاني ، والعملية C تمثل القيد الثالث . بالتالي :

5- **القيد الأول** : الزمن المتاح هو 420 دقيقة يوميا (ليس بالضرورة استغلاله كله لكن لا يمكن استغلال قدر اكبر منه) ، وان الوحد الواحدة من المنتج الأول تحتاج الى 2 دقيقة والوحدة الواحدة من المنتج الثاني تحتاج الى 2 دقيقة كذلك بينما تحتاج الوحدة الثالثة 3 دقيقة. وعليه يمكن صياغة القيد الأول بالشكل الاتي

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 420$$

6- **القيد الثاني** : الزمن المتاح هو 440 دقيقة يوميا (ليس بالضرورة استغلاله كله لكن لا يمكن استغلال قدر اكبر منه) ، وان الوحد الواحدة من المنتج الأول تحتاج الى 5 دقيقة والوحدة الواحدة من المنتج الثاني تحتاج الى 0 دقيقة كذلك بينما تحتاج الوحدة الواحدة من المنتج الثالث الى 2 دقيقة . وعليه يمكن صياغة القيد الثاني بالشكل

$$5\,X_1 + 2X_3 \leq 440$$

7- **القيد الثالث** : الزمن المتاح هو 465 دقيقة يوميا (ليس بالضرورة استغلاله كله لكن لا يمكن استغلال قدر أكبر منه) ، وان الوحد الواحدة من المنتج الأول تحتاج الى 3 دقيقة والوحدة الواحدة من المنتج الثاني تحتاج الى 6 دقيقة كذلك بينما تحتاج الوحدة الواحدة من المنتج الثالث الى 0 دقيقة . وعليه يمكن صياغة القيد الثالث بالشكل الاتي

$$3X_1 + 6X_2 \leq 465$$

ملاحظة رقم 1 / عندما تكون قيمة المتغير في القيود 0 فان هذا يعني أن هذا المنتج لا يحتاج للدخول الى هذه العملية ، بالتالي فان المنتج الأول يحتاج للعمليات الثلاثة (لكونه قيمة X1 ليست صفرا في القيود الثلاثة) ، بينما المنتج الثاني يحتاج الى العملية الأولى والثالثة الكون قيمة X2 ليست صفرا في القيد الأول والثالث) ، واخيرا يحتاج المنتج الثالث الى العملية الأولى والثانية (لكون قيمة X3 ليست صفرا في القيد الأول والثاني) .

ملاحظة رقم2 / عندما يكتب المتغير في دالة الهدف او القيد بدون رقم بجانبه فان هذا يعني أن معامل المتغير = 1 ، في حين عدم وجود المتغير نهائية فان هذا يعني ان معامل المتغير = 0 أي غير موجود.

رابعاً : قيد عدم السلبية يشير إلى أن كل متغير (منتج) اما ينتج بعدد معين من الوحدات وبالتالي قيمته اكبر من 0 ، أو لا ينتج نهائية وبالتالي قيمته = 0 ، وهذا يعني عدم امكانية ان يكون المتغير سالبة (اقل من 0).

ويكتب القيد بالشكل الاتي بغض النظر عن نوع الدالة تعظيم او تدنية

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

بالنهاية يكون نموذج البرجمة الخطية لهذا المثال بالشكل الاتي

$$Max\ Z = 5X_1 + 4X_2 + 7X_3$$

S.T تؤدي الى

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 420$$

$$5X_1 + 2X_3 \leq 440$$

$$3X_1 + 6X_2 \leq 465$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

مثال 4 : مصنع صناعات جلدية يقوم بإنتاج اربع منتجات (حقائب سفر ، حقائب أطفال ، حقائب رسمية ، حقائب نسائية) . تستخدم لغرض صناعة الحقائب (مواد اولية ، ساعات عمل " عمال " ، مكائن) . تمثل المواد الأولية جلد مقاس بالمتر ، العمل بالساعات ، والمكائن بالعدد .

الجدول الاتي يوضح تفاصيل كل منتج وما يقابله من عناصر الانتاج المطلوبة لكل وحدة بالإضافة الى عناصر الانتاج المتاحة .

المنتجات	عناصر الانتاج لكل وحدة واحدة لكل منتج			تكلفة الوحدة الواحدة
	مواد اولية	ساعات عمل	مكائن	
حقائب سفر	5	6	3	7
حقائب اطفال	4	9	4	8
حقائب رسمية	3	12	7	5
حقائب نسائية	3	10	5	10
عناصر الانتاج المتاحة	2000	280	35	

المطلوب/ صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق اقل كلفة ممكنة .

الحل

اولا : تمثل المتغيرات المنتجات ، وبالتالي فان عدد المتغيرات سيكون اربع (X_1 , X_2 , X_3 , X_4) . نفترض الاتي

- أن عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من حقائب سفر = X_1
- أن عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من حقائب أطفال = X_2
- أن عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من حقائب رسمية = X_3
- أن عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من حقائب نسائية = X_4

ثانيا : نوع دالة الهدف في هذا المثال (كلفة) أي تقليل وبالتالي Minimum ، وان الارقام التي ستوضع أمام كل متغير في دالة الهدف تمثل كلفة الوحدة الواحدة لكل منتج . وبالتي يمكن صياغة دالة الهدف بالشكل الاتي

$$\text{Min } Z=7X_1+8X_2+5X_3+10X_4$$

ثالثاً : القيود هنا تمثل عناصر الانتاج (الموارد ، العمل ، المكائن) وبالتالي فان الموارد تمثل القيد الاول وساعات العمل تمثل القيد الثاني والمكائن تمثل القيد الثالث وعلية يمكن كتابتها بالشكل الاتي :

القيد الاول $5X_1+4X_2+3X_3+3X_4\leq 2000$

القيد الثاني $6X_1+9X_2+12X_3+10X_4\leq 280$

القيد الثالث $3X_1+4X_2+7X_3+5X_4\leq 35$

رابعاً : قيد عدم السلبية يشير إلى أن كل متغير (منتج) اما ينتج بعدد معين من الوحدات وبالتالي قيمته اكبر من 0 ، أو لا ينتج نهائية وبالتالي قيمته = 0 ، وهذا يعني عدم امكانية ان يكون المتغير سالبة (اقل من 0).

ويكتب القيد بالشكل الاتي بغض النظر عن نوع الدالة تعظيم او تدنية

$$X_1 , X_2 , X_3 ,X_4\geq 0$$

يمكن تلخيص نموذج البرمجة الخطية للمثال السابق بالشكل الاتي :

$$\text{Min } Z=7X_1+8X_2+5X_3+10X_4$$

S.T

$$5X_1+4X_2+3X_3+3X_4\leq 2000$$

$$6X_1+9X_2+12X_3+10X_4\leq 280$$

$$3X_1+4X_2+7X_3+5X_4\leq 35$$

$$X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3\ ,X_4\geq 0$$

تمارين واجب

التمرين الاول : يقوم مصنع لإنتاج السيارات بإنتاج نوعين من السيارات (الصالون والحمل) وان الاقسام المهمة في العملية الانتاجية هي (قسم الكابس وتجميع محرك السيارة وتجميع هيكل سيارة الصالون وتجميع هيكل سيارة الحمل وقسم الاصباغ) والجدول الاتي يتضمن المعلومات المتوفرة عن المصنع . علماً ان المصنع يحقق ربحا مقداره 50000 دينار من سيارة الصالون و 70000 من سيارة الحمل .

الطاقة الانتاجية المتاحة اسبوعيا	عناصر الانتاج لكل وحدة واحدة لكل منتج		القسم
	ساعات العمل لسيارة الحمل	ساعات العمل لسيارة الصالون	
3000	12	10	المكابس
3500	6	4	تجميع محرك السيارة
1000	0	8	تجميع هيكل الصالون
1000	11	0	تجميع محرك الحمل
1200	3	3.5	قسم الاصباغ

المطلوب/ صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق اكبر ربح للشركة .

التمرين الثاني :معمل نجارة يقوم بإنتاج ثلاث منتجات هي (الكراسي ومناضد صغيرة ومناضد كبيرة) ويحتاج الى (خشب وساعات عمل وايدي عاملة) لأغراض الانتاج فاذا توفرت البيانات التالية والتي تمثل مستلزمات الانتاج .

المنتجات			المواد الاولية
مناضد كبيرة	مناضد صغيرة	كراسي	
5	3	3	الخشب/ قطع
3	2.5	2	ساعات عمل / وحدة
4	3	2	عمل / عدد
50	30	20	كلفة الوحدة / الف دينار

علما ان المتوفر من قطع الخشب لإنتاج تلك المنتجات هو 6000 قطعة وان ساعات العمل يجب لا يقل عن 15 ساعة في اليوم وان عدد العمال في العمل لا يتجاوز 30 عامل .

المطلوب/ صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق اقل كلفة ممكنة

طرق حل مسائل البرمجة الخطية

اي ايجاد قيم (X1,X2) والمقصود بطريقة حل مسائل البرمجة الخطية هو ايجاد قيمة المتغيرات في دالة الهدف بما يحقق القيود المفروضة اضافة الى قيد عدم السلبية ويمكن تحديد هذه الطرق بالاتي :

اولاً: طريقة الرسم البياني (Graphical Method)

وتستخدم عندما تكون المتغيرات في دالة الهدف اثنان فقط (X_1,X_2) بغض النظر عن عدد القيود وانواعها .

ثانياً : طريقة السمبلكس (Smplex Method)

وتستخدم عندما يكون عدد المتغيرات اثنان فأكثر ولكن بشرط ان تكون جميع القيود من نوع اقل او يساوي (≤) .

قبل التطرق الى طرق حل مسائل البرمجة الخطية يجب ان نوضح صيغ البرمجة الخطية .

توجد هناك صيغتان للبرمجة الخطية وهما :

اولاً :- الصيغة القانونية (Canonical Form)

شروط الصيغة القانوني

1- دالة الهدف يجب ان تكون دالة تعظيم Max .

2- جميع القيود تكون على شكل متراجحات من نوع اقل او يساوي (≤)

3- ليس من الضروري ان تكون قيم الطرف الايمن موجبة.

4- جميع متغيرات القرار تكون صفرية او موجبة.

والصيغة الاتية تمثل الصيغة القانونية.

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 12X_2$$

S.T تؤدي الى

$$3X_1+4X_2 \le 40$$

$$5X_1+2X_2 \le -20$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

لكن قد تواجهنا بعض التحويرات عند تحويل نموذج البرمجة الخطية الى الصيغة القانونية والتي يمكن تحديدها بالاتي:

1- اذا كانت دالة الهدف من نوع تدنية (Min) فيجب تحويلها الى دالة هدف من نوع تعظيم (Max) من خلال ضرب المعادلة (Z) في (-1)وكالاتي:

$$\text{Min } Z = 6X_1 + 2X_2 - X_3$$

يتم تحويل المعادلة الى الصيغة القانونية من خلال ضربها ب (-1) لتصبح بالشكل الاتي :

$$\text{Max } Z = -6X_1 - 2X_2 + X_3$$

2- اذا كانت القيود من نوع اكبر او يساوي (≥) يتم تحويلة الى نوع اصغر او يساوي (≤) بضرب القيد ب (-1) وكالاتي:

$$2X_1-5X_2+3X_3 \ge 30$$

يتم تحويل القيد الى اصغر او يساوي (≤) من خلال ضرب القيد ب (-1) ليصبح بالشكل الاتي :

$$-2X_1+5X_2-3X_3 \le -30$$

3- في حال وجود احد القيود عل شكل معادلة (مساواة) فيمكن تحويلة الى متراجحتين متعاكستين في الاتجاه احدهما من نوع اصغر او يساوي والاخرى من نوع اكبر او يساوي ثم تحويل المتراجحة من نوع اكبر او يساوي الى نوع اصغر او يساوي من خلال ضربها في (1-) وكالاتي :

$$2X_1-5X_2+3X_3 = 30$$

القيد اعلاه من نوع المساواة يتم تحويلة الى الصيغة القانونية بالشكل الاتي

$$2X_1-5X_2+3X_3 \leq 30$$
$$2X_1-5X_2+3X_3 \geq 30$$

ثم نقوم بتحويل القيد الثاني الى اقل او يساوي بضربة في (1-) ليصبح بالشكل الاتي

$$-2X_1+ 5X_2-3X_3 \leq -30$$

4- في حالة وجود قيمة مطلقة لاحد القيود فان معالجتها تكون بالشكل الاتي :

$$X_1 + 2X_2 \geq |8|$$

يتم تحويلها بالشكل الاتي

$$X_1+2X_2 \geq 8$$
$$X_1+2X_2 \geq -8$$

ثم نقوم بضر القيود الجديدة في (1-) لتحويلها الى اصغر او يساوي لتصبح بالشكل الاتي :

$$-X_1-2X_2 \leq -8$$
$$-X_1 - 2X_2 \leq 8$$

مثال اخر

$$|3X_1 + 2X_2| \leq 10$$

الحل

$$3X_1 + 2X_2 \leq 10$$
$$-3X_1 - 2X_2 \leq 10$$

ثانياً :- الصيغة القياسية (Standard Form)

تعد هذه الصيغة افضل من الصيغة القانونية لأنها تستخدم في الطريقة المبسطة (السمبلكس) في تحليل البرمجة الخطية المعقدة اذ لا يمكن تطبيق طريقة السمبلكس مالم يتم تحويل نموذج البرمجة الخطية الى الصيغة القياسية ويمكن تحديد شروط الصيغة القياسية بالاتي :-

1- دالة الهدف هي دالة تعظيم (Max) او دالة تدنية (Min)
2- جميع القيود تكون على شكل معادلات مساواة (=)
3- من الضروري ان تكون قيم الطرف الايمن موجبة
4- جميع متغيرات القرار صفرية او موجبة

ويمكن توضيح الخطوات السابقة بالمثال الاتي:-

مثال / حول انموذج البرمجة الخطية التالي الى الصيغة القياسية.

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 5X_4$$

$$S.T$$

$$2X_1 - 4X_2 + 6X_3 + X_4 \leq 18$$

$$X_1 + 5X_4 \geq -6$$

$$X_2 + X_3 + X_4 = -10$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 \geq 0$$

الحل

فيما يخص دالة الهدف فهي تحقق الشرط

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 5X_4$$

اما ما يخص القيود فيجب ان تحول الى المساواة

القيد الاول اصغر او يساوي فيتم تحويلة الى المساواة ليصبح بالشكل التالي

$$2X_1 - 4X_2 + 6X_3 + X_4 + S_1 = 18$$

ملاحظة : S1 يمثل المتغيرات الوهمية التي تضاف بإشارة (+) الى المتراجحات من نوع اقل او يساوي لغرض الموازنة كما في القيد اعلاه وتضاف بإشارة (-) الى المتراجحات من نوع اكبر او يساوي لغرض الموازنة .

القيد الثاني من نوع اكبر او يساوي لكن الطرف الايمن اشارته سالبة لذلك يتم التخلص من علامة السالب من خلال ضرب القيد في (-1) ثم تحويلة الى المساواة وكالاتي :

$$-X_1 - 5X_4 \leq 6$$

$$-X_1 - 5X_4 + S_2 = 6$$

القيد الثالث من نوع المساواة لكن اشارة الطرف الايمن سالبة فيتم ضرب القيد في (-1) ليصبح بالشكل الاتي:

$$- \; X_2 - X_3 - X_4 = 10$$

قيد عدم السلبية يصبح بالشكل الاتي بعد اضافة المتغيرات الوهمية

$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , S_1 , S_2 \geq 0$$

كما ان المتغيرات الوهمية تضاف ايضاً الى دالة الهدف لتصبح بالشكل الاتي :

$$Max\ Z = 6X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 5X_4 + 0S_1 + 0S_2$$

اولاً: طريقة الرسم البياني (Graphical Method)

يفضل أن تستخدم هذه الطريقة عندما يحتوي أنموذج البرمجة الخطية على متغيرين فقط ، وتعد هذه الطريقة من أسهل طرائق الحل إلا إنها غير كفوءة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية . وتتلخص خطوات هذه الطريقة بما يلي

1- تحويل جميع المتراجحات في القيود إلى معادلات (مساواة) ، ثم نجعل قيمة المتغير الأول (X1) تساوي صفر لكي نحصل على قيمة المتغير الأخر (X2) وبالعكس .بعدها يتم تبويب نقاط الإحداثيات في جدول

2- يتم رسم محورين ، الأول (X1) يمثل المحور الأفقي والثاني (X2) يمثل المحور العمودي.

3- نرسم إحداثيات النقاط على المحورين والتي ستمثل بخطوط مستقيمة وبعدها تحدد منطقة الحلول الممكنة (Feasible Space) التي تحقق جميع القيود من تقاطع هذه المستقيمات

4- نجد قيمة (Z) بعد تعويض قيم المتغيرين (X1 ,X2) فيها

مثال 1/ اوجد الحل الامثل لأنموذج البرمجة الخطية ادناه بطريقة الرسم البياني :

$$Max\ Z= 3X_1 +4X_2$$

$$S.\ T$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 24$$

$$3X_1 + X_2 \leq 21$$

$$X_1 + X_2 \leq 9$$

$$X_1 ,X_2 \geq$$

الحل /

1-موازنة النموذج اي نقوم بتحويل جميع المتراجحات في القيود الى معادلات وكالاتي :

$$2X_1 + 3X_2 = 24$$

$$3X_1 + X_2 = 21$$

$$X_1 + X_2 = 9$$

ثم نقوم بتبويب البيانات اي ايجاد احداثيات النقاط وذلك من خلال افتراض ان قيمة احد المتغيرين تساوي صفر لإيجاد قيمة المتغير الاخر وكالاتي:

القيد الاول / $2X_1 + 3X_2 = 24$

نفترض ان قيمة (X_1) تساوي صفر فان قيمة (X_2) تساوي (8)

نفترض ان قيمة (X_2) تساوي صفر فان قيمة (X_1) تساوي (12)

القيد الثاني / $3X_1 + X_2 = 21$

نفترض ان قيمة (X_1) تساوي صفر فان قيمة (X_2) تساوي (21)

نفترض ان قيمة (X_2) تساوي صفر فان قيمة (X_1) تساوي (7)

القيد الثالث / $X_1 + X_2 = 9$

نفترض ان قيمة (X_1) تساوي صفر فان قيمة (X_2) تساوي (9)

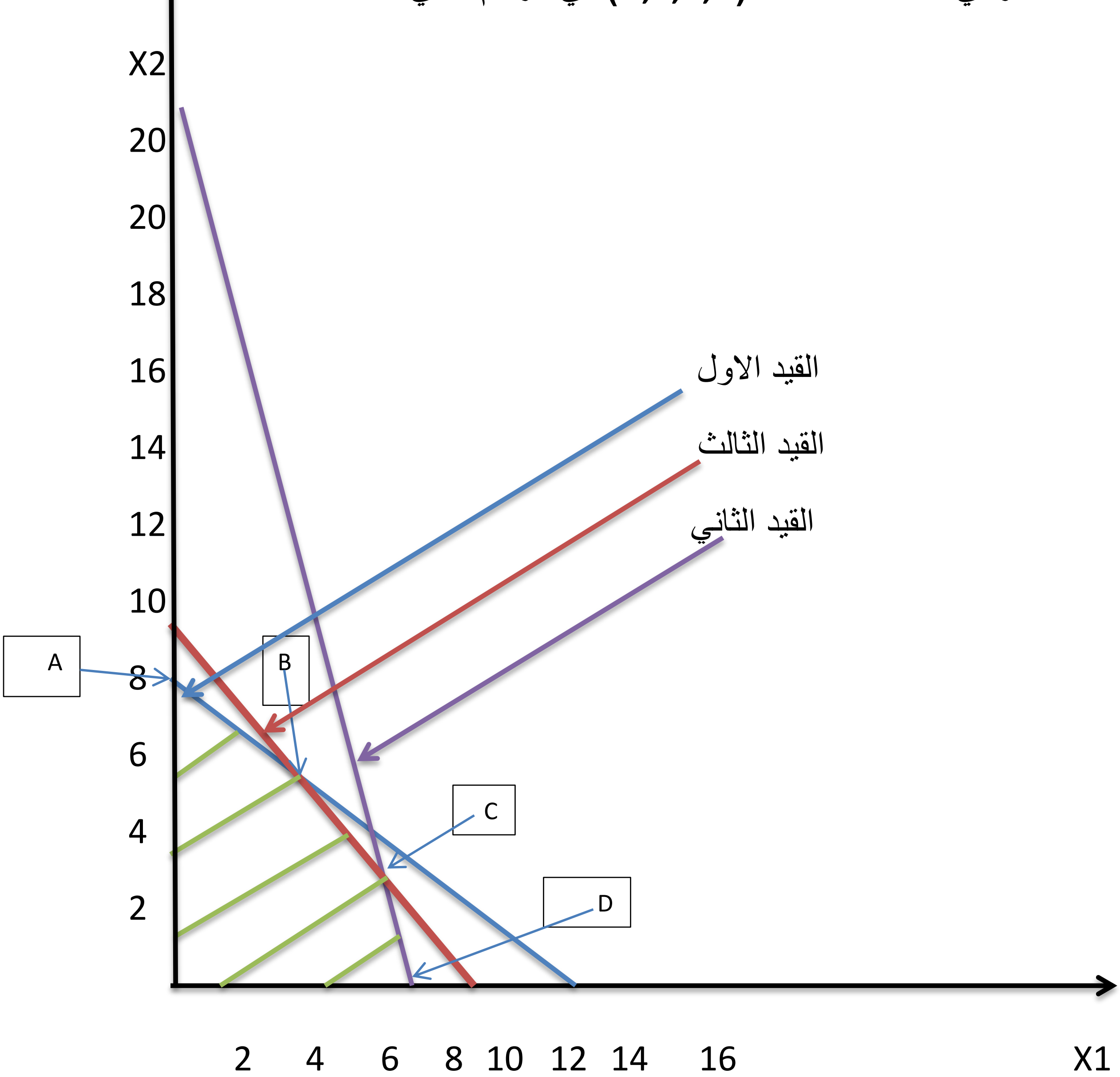
نفترض ان قيمة (X_2) تساوي صفر فان قيمة (X_1) تساوي (9)

نقوم بتبويب البيانات على شكل جدول وكالاتي

رقم القيد	قيمة X_1	قيمة X_2
القيد الاول	0 12	8 0
القيد الثاني	0 7	21 0
لقيد الثالث	0 9	9 0

2- نحدد منطقة الحلول الممكنة ويتم ذلك من خلال رسم محورين الافقي (X_1) والعمودي (X_2) ونضع عليها البيانات (احداثيات النقاط) ونصل هذه النقاط

بخطوط مستقيمة ومن خلال المتراجحات المعطاة في القيود نحدد منطقة الحلول الممكنة وهي المنطقة المظللة (D,C,B,A) في الرسم الاتي .



3- عملية صنع القرار : نجد البدائل الممكنة او الحلول الممكنة لكل نقطة من الشكل المظلل بمعنى ايجاد قيمة (X1) وقيمة (X2) ومن ثم نعوضها في (Z) وكالاتي :

النقطة (A) قيمة (X1) هي (0) وقيمة (X2) هي (8) نعوض في دالة الهدف (Z)

حيث ان **$Z= 3X_1 +4X_2$**

وبالتعويض **$Z= 3(0) +4(8) = 32$**

النقطة (B) قيمة (X1) هي (3) وقيمة (X2) هي (6) نعوض في دالة الهدف (Z)

$$Z= 3X_1 +4X_2$$

وبالتعويض $Z= 3(3) +4(6) = 33$

النقطة (C) قيمة (X1) هي (6) وقيمة (X2) هي (3) نعوض في دالة الهدف (Z)

$$Z= 3X_1 +4X_2$$

وبالتعويض $Z= 3(6) +4(3) = 30$

النقطة (D) قيمة (X1) هي (7) وقيمة (X2) هي (0) نعوض في دالة الهدف (Z)

$$Z= 3X_1 +4X_2$$

وبالتعويض $Z= 3(7) +4(0) = 21$

4-عملية اتخاذ القرار : اي تحديد الحل الامثل الذي يحقق اعلى ربح ممكن وعلية نختار القرار (B) ونستنتج ان الكمية المنتجة المثلى من (X_1) هي (3) ومن (X_2) هي (6) التي تحقق اعلى ربح مقداره (33) .

مثال2 /اوجد الحل الامثل لأنموذج البرمجة الخطية ادناه بطريقة الرسم البياني

$$\text{Max } Z= 8X_1 + 6X_2$$

S.T

$$4X_1+ 2X_2 \leq 60$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 48$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل /

1-موازنة النموذج اي نقوم بتحويل جميع المتراجحات في القيود الى معادلات وكالاتي :

$$4X_1 + 2X_2 = 60$$

$$2X_1 + 4X_2 = 48$$

ثم نقوم بتبويب البيانات اي ايجاد احداثيات النقاط وذلك من خلال افتراض ان قيمة احد المتغيرين تساوي صفر لإيجاد قيمة المتغير الاخر وكالاتي:

القيد الاول / $4X_1 + 2X_2 = 60$

نفترض ان قيمة (X1) تساوي صفر فان قيمة (X2) تساوي (30)

نفترض ان قيمة (X2) تساوي صفر فان قيمة (X1) تساوي (15)

القيد الثاني / $2X_1 + 4X_2 = 48$

نفترض ان قيمة (X1) تساوي صفر فان قيمة (X2) تساوي (12)

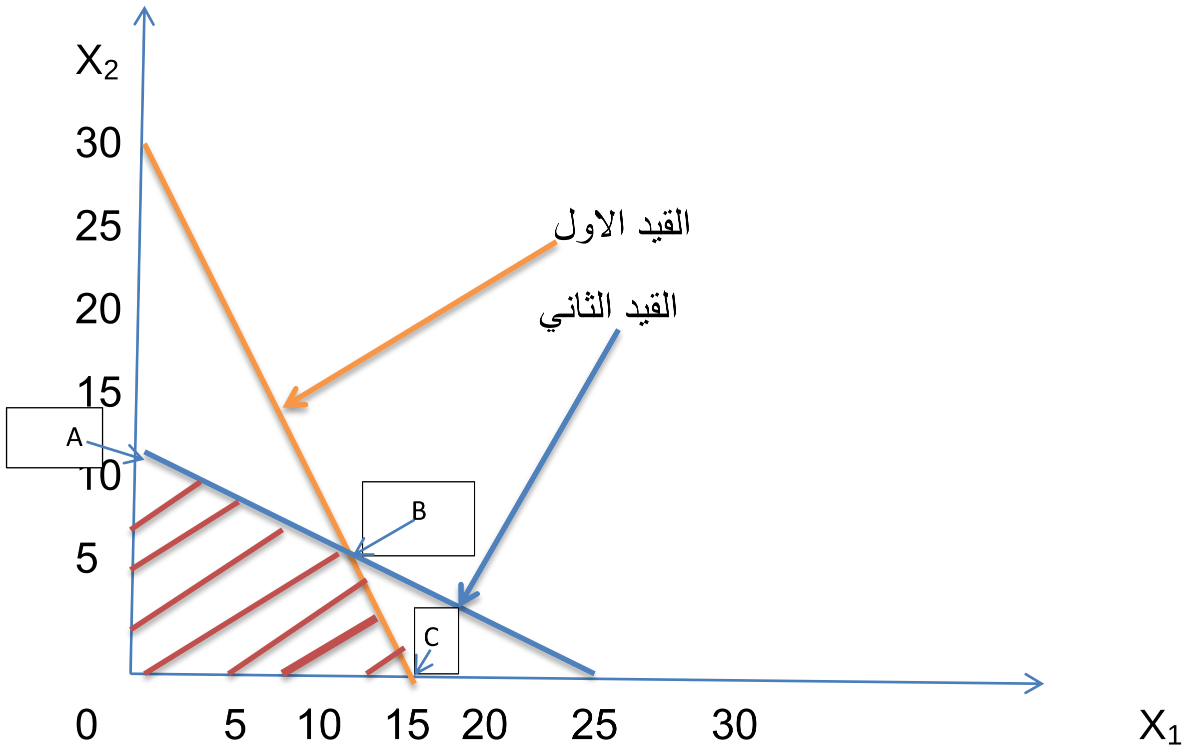
نفترض ان قيمة (X2) تساوي صفر فان قيمة (X1) تساوي (24)

نقوم بتبويب البيانات على شكل جدول وكالاتي

قيمة X_2	قيمة X_1	رقم القيد
30 0	0 15	القيد الاول
12 0	0 24	القيد الثاني

2- نحدد منطقة الحلول الممكنة ويتم ذلك من خلال رسم محورين الافقي (X_1) والعمودي (X_2) ونضع عليها البيانات (احداثيات النقاط) ونصل هذه النقاط

بخطوط مستقيمة ومن خلال المتراجحات المعطاة في القيود نحدد منطقة الحلول الممكنة وهي المنطقة المظللة (A,B,C) في الرسم الاتي .



3- عملية صنع القرار : نجد البدائل الممكنة او الحلول الممكنة لكل نقطة من الشكل المظلل بمعنى ايجاد قيمة (X1) وقيمة (X2) ومن ثم نعوضها في (Z) وكالاتي :

النقطة (A) قيمة (X1) هي (0) وقيمة (X2) هي (12) نعوض في دالة الهدف (Z)

حيث ان $Z= 8X_1 +6X_2$

وبالتعويض $Z= 8(0) +6 (12) = 72$

النقطة (B) قيمة (X1) هي (12) وقيمة (X2) هي (6) نعوض في دالة الهدف (Z)

$Z= 8X_1 +6X_2$

وبالتعويض $Z= 8(12) +6 (6) = 132$

النقطة (C) قيمة (X1) هي (15) وقيمة (X2) هي (0) نعوض في دالة الهدف (Z)

$$Z= 8X_1 +6X_2$$

وبالتعويض $Z= 8(15) +6 (0) = 120$

4-عملية اتخاذ القرار : اي تحديد الحل الامثل الذي يحقق اعلى ربح ممكن وعلية نختار القرار (B) ونستنتج ان الكمية المنتجة المثلى من (X_1) هي (12) ومن (X_2) هي (6) التي تحقق اعلى ربح مقداره (132) .

تمارين واجب

<u>التمرين 1 / حول انموذج البرمجة الخطية ادناه الى الصيغة القانونية:</u>

$$\text{Min } Z = -3X_1 +2X_2 + X_3$$

S.T

$$X_1 - 5X_2 +X_3 = 8$$

$$|2X_1 +4X_2 +3X_3| \leq 6$$

$$X_1 , X_2 ,X_3 \geq 0$$

<u>التمرين 2 / حول انموذج البرمجة الخطية ادناه الى الصيغة القياسية:</u>

$$\text{Min } Z = -3X_1 +2X_2 + X_3$$

S.T

$$X_1 - 5X_2 +X_3 = 8$$

$$|2X_1 +4X_2 +3X_3| \leq 6$$

$$X_1 , X_2 ,X_3 \geq 0$$

مثال 1/ اوجد الحل الامثل لأنموذج البرمجة الخطية ادناه بطريقة الرسم البياني :

$$\text{Min } Z= 41X_1 +35X_2$$

S. T

$$2X_1 + 3X_2 \geq 1250$$

$$X_1 + X_2 \geq 250$$

$$5X_1 + 3X_2 \geq 900$$

$$0.6X_1 +0.25X_2 \geq 232.5$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل /

1-موازنة النموذج اي نقوم بتحويل جميع المتراجحات في القيود الى معادلات وكالاتي :

$$2X_1 + 3X_2 = 1250$$

$$X_1 + X_2 = 250$$

$$5X_1 + 3X_2 = 900$$

$$0.6X_1 +0.25X_2 =232.5$$

ثم نقوم بتبويب البيانات اي ايجاد احداثيات النقاط وذلك من خلال افتراض ان قيمة احد المتغيرين تساوي صفر لإيجاد قيمة المتغير الاخر وكالاتي:

القيد الاول / $2X_1 + 3X_2 = 1250$

نفترض ان قيمة (X_1) تساوي صفر فان قيمة (X_2) تساوي (416.66)

نفترض ان قيمة (X_2) تساوي صفر فان قيمة (X_1) تساوي (625)

القيد الثاني / $X_1 + X_2 = 250$

نفترض ان قيمة (X_1) تساوي صفر فان قيمة (X_2) تساوي (250)

نفترض ان قيمة (X_2) تساوي صفر فان قيمة (X_1) تساوي (250)

القيد الثالث / $5 X_1 + 3X_2 = 900$

نفترض ان قيمة (X_1) تساوي صفر فان قيمة (X_2) تساوي (300)

نفترض ان قيمة (X_2) تساوي صفر فان قيمة (X_1) تساوي (180)

القيد الرابع / $0.6 X_1 +0.25X_2 =232.5$

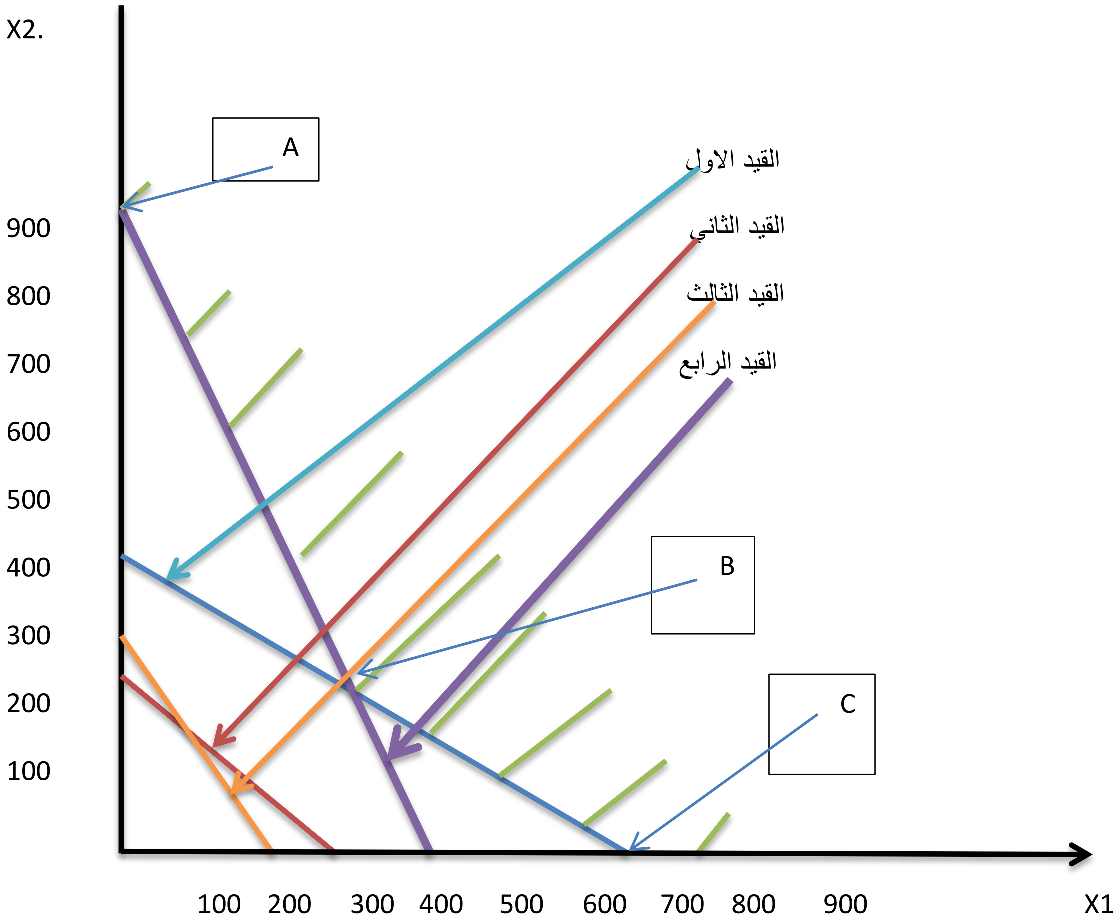
نفترض ان قيمة (X_1) تساوي صفر فان قيمة (X_2) تساوي (930)

نفترض ان قيمة (X_2) تساوي صفر فان قيمة (X_1) تساوي (387.5)

نقوم بتبويب البيانات على شكل جدول وكالاتي

رقم القيد	قيمة X_1	قيمة X_2
القيد الاول	0 625	416.66 0
القيد الثاني	0 250	250 0
القيد الثالث	0 180	300 0
القيد الرابع	0 387.5	930 0

2- نحدد منطقة الحلول الممكنة ويتم ذلك من خلال رسم محورين الافقي (X_1) والعمودي (X_2) ونضع عليها البيانات (احداثيات النقاط) ونصل هذه النقاط بخطوط مستقيمة ومن خلال المتراجحات المعطاة في القيود نحدد منطقة الحلول الممكنة وهي المنطقة المظللة (C,B,A) في الرسم الاتي .



نجد البدائل الممكنة او الحلول الممكنة لكل نقطة من الشكل المظلل بمعنى ايجاد قيمة (X_1) وقيمة (X_2) ومن ثم نعوضها في (Z) وكالاتي :

النقطة	قيم (X1)	قيم (X2)	دالة الهدفة $Z= 41X_1 +35X_2$	قيمة Z
A	0	930	Z=41(0)+35(930)=32550	32550
B	296.6	219.2	Z=41(296.6)+35(219.2)=19832	19832
C	625	0	Z=41 (625)+35 (0)= 25625	25625

وبما ان دالة الهدف هي (Min) نختار الحل الامثل الذي يحقق اقل كلفة ممكن وعلية نختار القرار (B) ونستنتج ان الكمية المنتجة المثلى من (X_1) هي (296.6) ومن (X_2) هي (219.2) التي تحقق اقل كلفة مقدارها (19833) .

مثال 2 : اوجد الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية الاتية بطريقة الرسم البياني :

$$\text{Min } Z = X_1 + 2X_2$$

$$\text{S.T}$$

$$4X_1 + X_2 \geq 4$$

$$2X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 \leq 2$$

$$X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل

نحول المتراجحات الى معادلات

$$4X_1 + X_2 = 4$$

$$2X_1 + 3X_2 = 6$$

$X_1 = 2$

$X_2 = 3$

ثم نقوم بتبويب البيانات اي ايجاد احداثيات النقاط وذلك من خلال افتراض ان قيمة احد المتغيرين تساوي صفر لإيجاد قيمة المتغير الاخر وكالاتي:

القيد الاول / $4X_1 + X_2 = 4$

نفترض ان قيمة (X_1) تساوي صفر فان قيمة (X_2) تساوي (4)

نفترض ان قيمة (X_2) تساوي صفر فان قيمة (X_1) تساوي (1)

القيد الثاني / $2X_1 + 3X_2 = 6$

نفترض ان قيمة (X_1) تساوي صفر فان قيمة (X_2) تساوي (2)

نفترض ان قيمة (X_2) تساوي صفر فان قيمة (X_1) تساوي (3)

القيد الثالث / $X_1 = 2$

قيمة (X_1) تساوي (2)

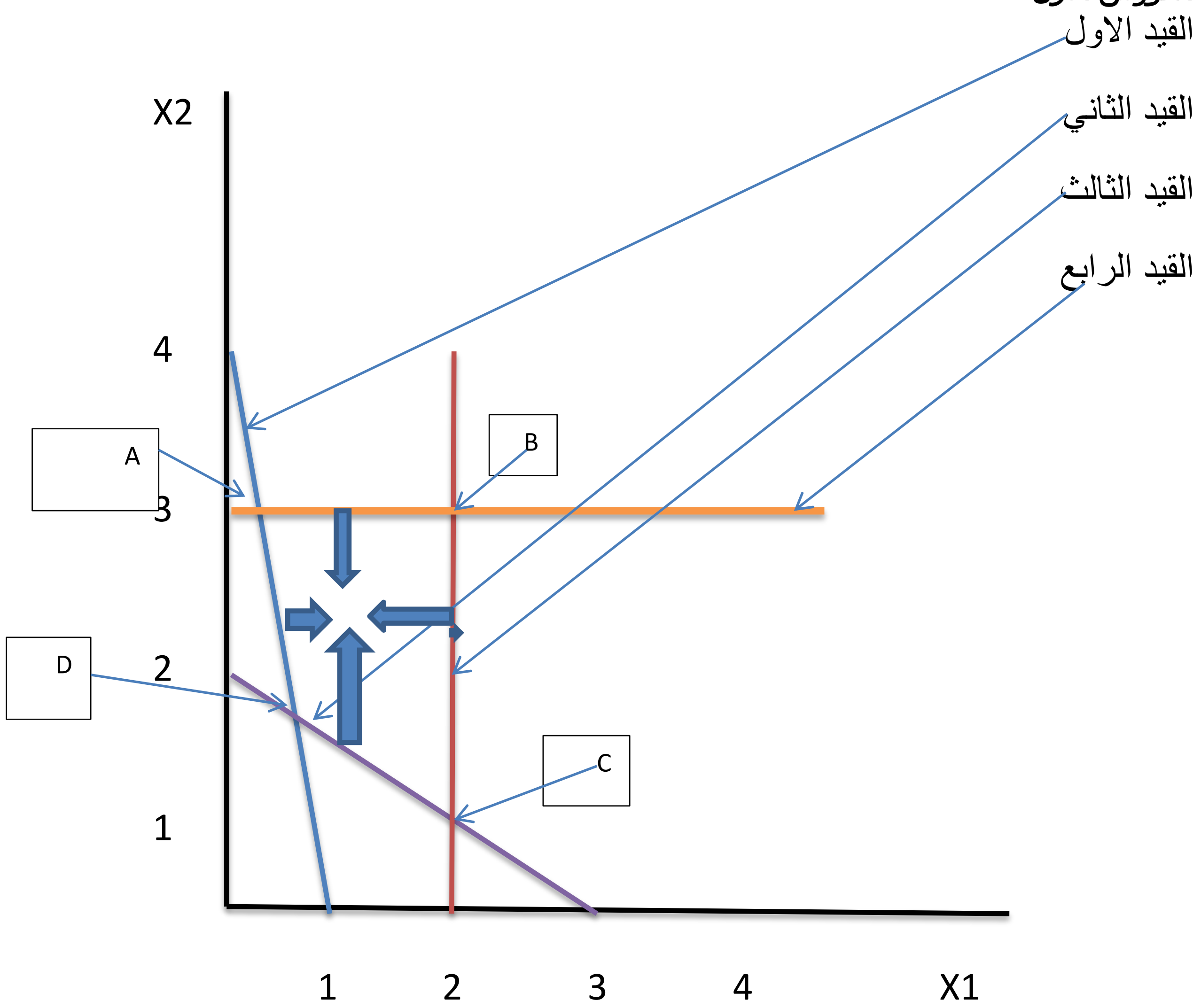
القيد الرابع / $X_2 = 3$

قيمة (X_2) تساوي (3)

نقوم بتبويب البيانات على شكل جدول وكالاتي

رقم القيد	قيمة X_1	قيمة X_2
القيد الاول	0 1	4 0
القيد الثاني	0 3	2 0
القيد الثالث	2	0
القيد الرابع	0	3

جامعة تكريت / كلية الادارة والاقتصاد / قسم الاقتصاد
المادة : بحوث العمليات / المرحلة :الرابعة
الكورس الاول



نجد الحلول الممكنة لكل نقطة من الشكل المظلل بمعنى ايجاد قيمة (X1) وقيمة (X2) ومن ثم نعوضها في (Z) وكالاتي :

النقطة	قيم (X1)	قيم (X2)	دالة الهدف $Z=X_1+2X_2$	قيمة Z
A	0.25	3	Z=1(0.25)+2(3)=6.25	6.25
B	2	3	Z=1(2)+2(3)=8	8
C	2	0.66	Z=1(2)+2(0.66)=3.32	3.32
D	0.6	1.6	Z=1(0.6)+2(1.6)=3.8	3.8

وبما ان دالة الهدف (Min) فان النقطة (c) هي نقطة الحل الامثل لأنها تحقق اقل كلفة ممكنة

حالات خاصة في البرمجة الخطية

1- تعدد الحلول المثلى
2- الحلول غير المحددة
3- عدم وجود حلول مقبولة
4- حلول منحلة

اولاً : تعدد الحلول المثلى

تكون لمشكلة البرمجة الخطية حلول مثلى متعددة عندما توازي دالة الهدف الخطية احد القيود الهيكلية المحاذية او بعبارة اخرى المحددة لمنطقة الامكانيات المتاحة كما يوضح ذلك المثال الاتي :

$$Max\ Z = X_1 + 2X_2$$

$$S\ .\ T$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_1 + X_2 \geq 1$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq$$

الحل :

1- نحول جميع المتراجحات الى معادلات (مساواة) لاستخراج قيم (X_1) و (X_2) .

$$X_1 + 2X_2 = 10$$

$$X_1 + X_2 = 1$$

$$X_2 = 4$$

القيد الاول

$$X_1 + 2X_2 = 10$$

نفترض ان قيمة (X_1) تساوي صفر فان قيمة (X_2) تساوي (5)

نفترض ان قيمة (X_2) تساوي صفر فان قيمة (X_1) تساوي (10)

القيد الثاني

$$X_1 + X_2 = 1$$

نفترض ان قيمة (X_1) تساوي صفر فان قيمة (X_2) تساوي (1)

نفترض ان قيمة (X_2) تساوي صفر فان قيمة (X_1) تساوي (1)

القيد الثالث

$$X_2 = 4$$

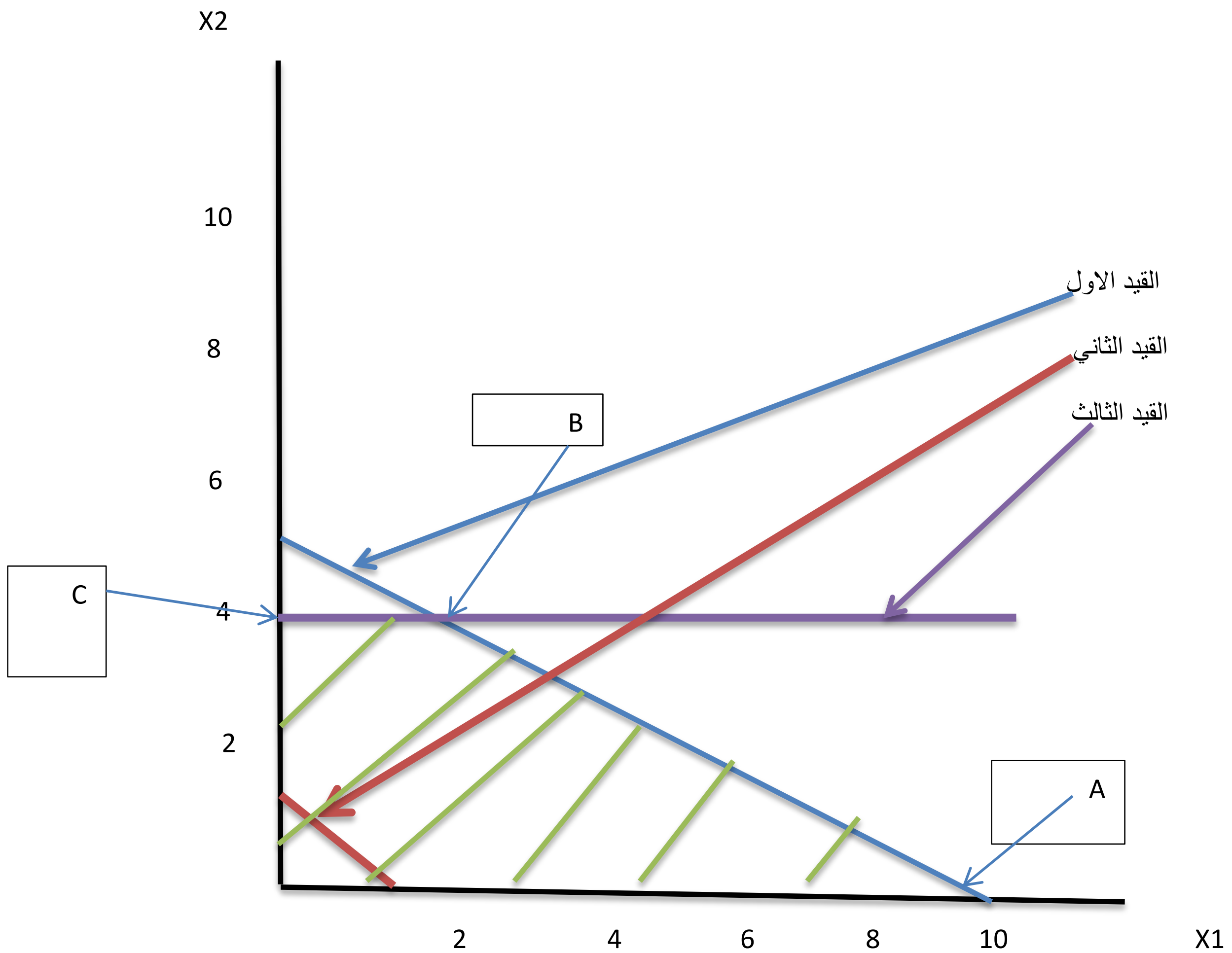
وبما ان قيمة (X_1) لا توجد في القيد فهذا يعني ان قيمتها صفر وقيمة (X_2) تساوي(4)

نقوم بتبويب البيانات على شكل جدول وكالاتي

قيمة X_2	قيمة X_1	رقم القيد
5 0	0 10	القيد الاول
1 0	0 1	القيد الثاني
4	0	القيد الثالث

2- نحدد منطقة الحلول الممكنة ويتم ذلك من خلال رسم محورين الافقي (X_1) والعمودي (X_2) ونضع عليها البيانات (احداثيات النقاط) ونصل هذه النقاط

بخطوط مستقيمة ومن خلال المتراجحات المعطاة في القيود نحدد منطقة الحلول الممكنة وهي النقاط (C,B,A) في الرسم الاتي .



- نجد الحلول الممكنة لكل نقطة من الشكل المظلل بمعنى ايجاد قيمة (X_1) وقيمة (X_2) ومن ثم نعوضها في (Z) وكالاتي :

النقطة	قيم (X_1)	قيم (X_2)	دالة الهدفة $Z=X_1+2X_2$	قيمة Z
A	10	0	Z=1 (10)+2(0)=10	10
B	2	4	Z=1 (2)+2(4)= 10	10
C	0	4	Z=1 (0)+2(4)=8	8

تحديد الحل الامثل الذي يحقق اعلى ربح ممكن لان دالة الهدف هي تعظيم وبما ان هناك اكثر من نقطة تمثل الحل الامثل وهي نقطة (A) و (B) فهذا يدل على

تعدد الحلول وتحدث هذه الحالة عندما يوازي احد القيود دالة الهدف ويحدث ذلك عندما يكون لهم نفس الميل .

ثانيا : الحلول غير المحددة :

تحدث هذه الحالة عندما تكون المساحة المشتركة بين القيود غير محددة ولتوضيح هذه الحالة نأخذ المثال الاتي :

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 23X_2$$

$$S.T$$

$$3X_1 + 5X_2 \geq 75$$

$$X_2 \leq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل

نحول المتراجحات الى معادلات

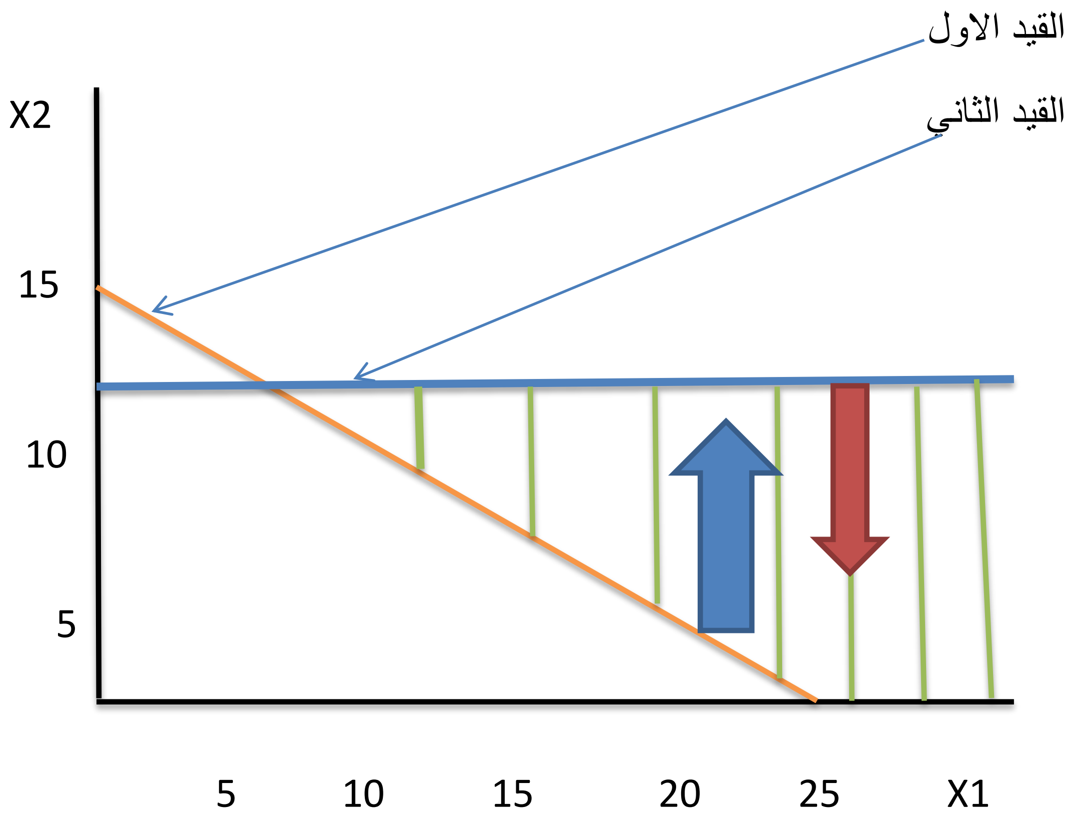
$$3X_1 + 5X_2 = 75$$

$$X_2 = 12$$

نستخرج احداثيات النقاط وكالاتي

قيمة X_2	قيمة X_1	رقم القيد
15 0	0 25	القيد الاول
12	0	القيد الثاني

نرسم القيود



المنطقة المظللة تمثل منطقة الحلول الممكنة وان اي نقطة تحقق حل المشكلة كما ان ابعد نقطة عن نقطة الاصل عبارة عن الحل الامثل وبما ان المنطقة المظللة مفتوحة فانه كلما ابتعدنا عن نقطة الاصل نحصل على حل اعلى من الحل السابق وبهذا لا نحصل على حل محدد وانما يكون الحل غير محدد.

ثالثاً : عدم وجود حلول مقبولة

تحدث هذه الحالة عندما تكون قيود مشكلة البرمجة الخطية بصيغة معينة بحيث تكون منطقة القيود عبارة عن مجموعة خالية وفي هذه الحالة لن نحصل على حلول مقبولة وكما في المثال الاتي :

$$Min\ Z = 20X_1 + 15X_2$$

S.T

$$5X_1 + 10X_2 \leq 25$$

$$5X_1 + 10X_2 \geq 50$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل

نحول المتراجحات الى معادلات (مساواة) وكالاتي

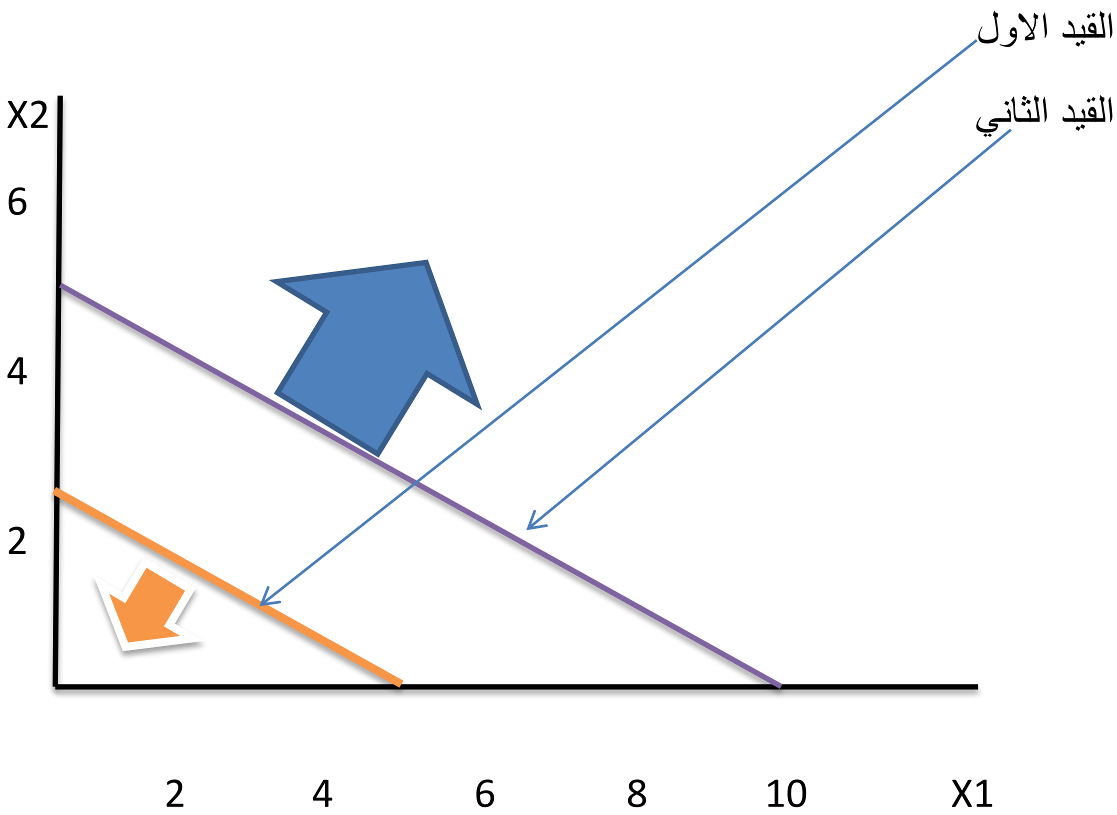
$$5X_1 + 10X_2 = 25$$

$$5X_1 + 10X_2 = 50$$

نستخرج احداثيات النقاط وكالاتي

رقم القيد	قيمة X_1	قيمة X_2
القيد الاول	0 5	2.5 0
القيد الثاني	0 10	5 0

نرسم القيود



يتضح من الشكل اعلاه عدم وجود نقطة واحدة تحقق جميع القيود في ان واحد وهذا يعني عدم وجود حلول مقبولة .

رابعاً : الانحلال :

تحدث هذه الحالة اذا كان عدد المتغيرات الاساسية التي تكون قيمتها اكبر من الصفر اقل من عدد القيود فان الحل يسمى حل منحل

$$\text{Max } Z = 12X_1 + 8X_2$$

S.T

$$4X_1 + 9X_2 \leq 1800$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 400$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل

نحول المتراجحات الى معادلات (مساواة) وكالاتي

$$4X_1 + 9X_2 = 1800$$

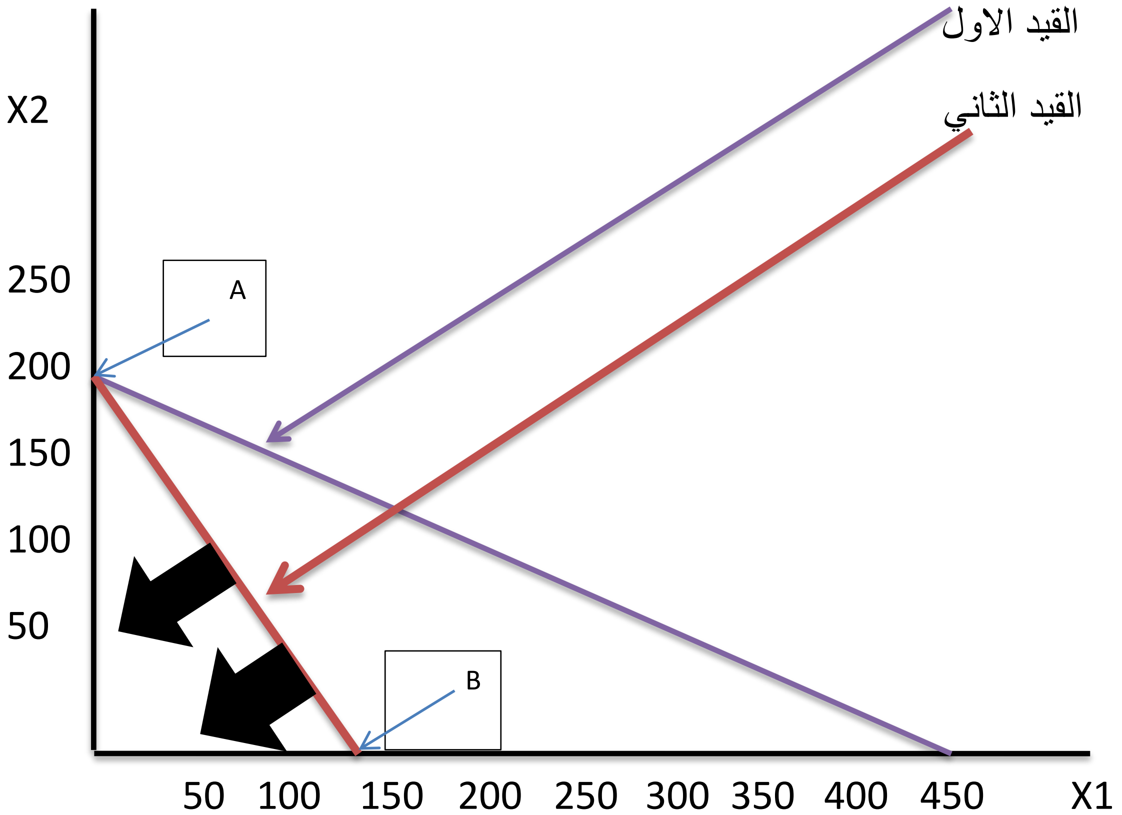
$$3X_1 + 2X_2 = 400$$

نستخرج احداثيات النقاط وكالاتي

رقم القيد	قيمة X_1	قيمة X_2
القيد الاول	0 450	200 0
القيد الثاني	0 133	200 0

جامعة تكريت / كلية الادارة والاقتصاد / قسم الاقتصاد
المادة : بحوث العمليات / المرحلة :الرابعة
الكورس الاول

نرسم القيود



نجد الحلول الممكنة

النقطة	قيم (X_1)	قيم (X_2)	دالة الهدفة $Z=12X_1+8X_2$	قيمة Z
A	0	200	Z=12(0)+8(200)=1600	1600
B	133.3	0	Z=12(133)+8(0)=1600	1599

وبما ان عدد المتغيرات في الحل الامثل هو متغير واحد فقط اي X2=200 وان عدد القيود الهيكلية هما قيدان وعلى هذا الاساس اذا كان عدد المتغيرات اقل من عدد القيود فان الحل عبارة عن حل منحل .

الطريقة الثانية :طريقة السمبلكس (Smplex Method)

هي وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة بالإضافة الى قدرتها في معالجة المشاكل التي تتجاوز عدد متغيراتها الاثنين وقد طورت هذه الطريقة من قبل عالم الرياضيات الامريكي جورج دانتزنج عام 1947 وتتعامل هذه الطريقة مع القيود التي تكون فيها المتراجحات من نوع اقل او يساوي (≤) فقط ولتوضيح هذه الحالة نأخذ المثال الاتي :

مثال 1/ اوجد الحل الامثل لانموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة السمبلكس .

$$Max\ Z = 30X_1 + 18X_2$$

S.T

$$X_1 + 2X_2 \leq 200$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 300$$

$$X_1 \leq 150$$

$$X_1\ ,\ X_2 \geq 0$$

الحل : 1- تحويل نموذج البرمجة الخطية الى الطريقة القياسية .

$$Max\ Z = 30X_1 + 18X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

S.T

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 200$$

$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 300$$

$$X_1 + S_3 = 150$$

$$X_1\ ,\ X_2,\ S_1\ ,S_2\ ,S_3\ \geq 0$$

2- نقوم بتصفير دالة الهدف (Z)

$$\text{Max } Z - 30X_1 - 18X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

3- تكوين جدول الحل الاساسي للمشكلة القياسية .

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	-30	-18	0	0	0	0
S_1	1	2	1	0	0	200
S_2	3	2	0	1	0	300
S_3	1	0	0	0	1	150

4- تحديد المتغير الداخل من خلال اختيار العامود الذي يقابل اكبر رقم بالسالب في دالة الهدف اذا كانت دالة الهدف (Max) والعامود الذي يقابل اكبر رقم موجب اذا كانت دالة الهدف (Min) اما اذا كانت الارقام متساوية نأخذ احدهما (X_1 , X_2) . ومن الجدول السابق نختار اكبر رقم بالسالب (30-)لان دالة الهدف (Max) اي نختار العامود (X_1) .

5-تحديد المتغير الخارج وذلك من خلال اختيار الصف الذي يقابل اقل رقم ناتج عن قسمة قيم الجانب الايمن (R.H.S) على ارقام العامود الداخل (X_1) والذي تم اختياره في الخطوة السابقة بغض النظر عن كون دالة الهدف (Max) او (Min) مع اهمال القيم السالبة والصفرية وكالاتي .

المتغير الداخل

المتغير الخارج

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S	R.H.S /X1
Z	-30	-18	0	0	0	0	0
S_1	1	2	1	0	0	200	200/1=200
S_2	3	2	0	1	0	300	300/3=100
S_3	1	0	0	0	1	150	150/1=150

العنصر المشترك

المتغير الخارج هو (S_2) لأنه يقابل اقل قيمه (100)

6-ايجاد العنصر المشترك (الرقم المحوري) وهو رقم (3) والناتج عن تقاطع العامود الداخل (X_1) مع الصف الخارج (S_2)

7- ايجاد الصف المحوري من خلال قسمة الصف الخارج (S_2) على العنصر المشترك (الرقم المحوري) (3) وكالاتي :

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S	
S_2	3	2	0	1	0	300	÷3
X_1	1	0.66	0	0.33	0	100	

الصف المحوري

8- نستخرج قيم الصفوف المتبقية الجديدة ل (Z) و (S_1) و (S_3)

نوجد قيم (Z) الجديدة من خلال طرح قيم (Z) القديمة من قيم الصف المحوري بعد ضربها بالرقم المقابل للمتغير الداخل وكالاتي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	-30	-18	0	0	0	0
X_1	1	0.66	0	0.33	0	100

نضرب الصف المحوري في الرقم المقابل للمتغير الداخل (-30)

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	-30	-18	0	0	0	0
X_1	-30	-20	0	-10	0	-3000
Z الجديدة	0	2	0	10	0	3000

نطرح قيم Z من قيم X1 لاستخراج قيم Zالجديدة

نوجد قيمة (S_1) الجديدة وبنفس الخطوات السابقة في استخراج قيم (Z) الجديدة وكالاتي :

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_1	1	2	1	0	0	200
X_1	1	0.66	0	0.33	0	100

نضرب الصف المحوري بالرقم المقابل للمتغير الداخل 1

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_1	1	2	1	0	0	200
X_1	1	0.66	0	0.33	0	100
S_1 الجديدة	0	1.34	1	-0.33	0	100

نطرح قيم S1 من قيم X1 لاستخراج قيم الجديدةS1

نوجد قيمة (S3) الجديدة وبنفس الخطوات السابقة في استخراج قيم (Z) الجديدة وكالاتي :

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S3	1	0	0	0	1	150
X1	1	0.66	0	0.33	0	100

نضرب الصف المحوري بالرقم المقابل للمتغير الداخل 1

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S3	1	0	0	0	1	150
X1	1	0.66	0	0.33	0	100
S3 الجديدة	0	-0.66	0	-0.33	1	50

نطرح قيم S3 من قيم X1 لاستخراج قيم الجديدةS3

بعد ان تم استخراج قيم جميع الصفوف الجديدة نكون جدول الحل الامثل فاذا كانت جميع قيم (Z) في الجدول موجبة ودالة الهدف (Max) فأننا قد توصلنا الى الحل الامثل ، اما اذا كانت جميع قيم (Z) سالبة ودالة الهدف (Min) فأننا قد توصلنا الى الحل الامثل وبخلاف ذلك يتم اعادة نفس الخطوات السابقة :.

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	0	2	0	10	0	3000
S_1	0	1.34	1	-0.33	0	100
X_1	1	0.66	0	0.33	0	100
S_3	0	-0.66	0	-0.33	1	50

وبما ان جميع قيم Z اكبر او مساوية للصفر فان هذا يعني اننا قد توصلنا الى الحل الامثل والذي يمكن تحديده بالاتي

Z= 3000

X_1=100

X_2=0

وهذا يعني ان صاحب الشركة اقصى ربح يمكن ان يصل اليه هو (3000) لان دالة الهدف تعظيم وان الكمية المنتجة من (X_1) هي (100) والكمية المنتجة من (X_2) هي (0) .

مثال 2 / اوجد الحل الامثل لأنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريق السمبلكس:

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 10X_2 + 4X_3$$

S.T

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 1000$$

$$X_1 + X_2 \leq 500$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 700$$

$$X_1, X_2, X_3 X \geq 0$$

الحل :1-- تحويل نموذج البرمجة الخطية الى الطريقة القياسية .

$$Max\ Z = 6X_1 + 10X_2 + 4X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

S.T

$$X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 1000$$

$$X_1 + X_2 + S_2 = 500$$

$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 700$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

2- نقوم بتصفير دالة الهدف (Z)

$$Z - 6X_1 - 10X_2 - 4X_3 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

3- تكوين جدول الحل الاساسي للمشكلة القياسية .

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	-6	-10	-4	0	0	0	0
S_1	1	1	1	1	0	0	1000
S_2	1	1	0	0	1	0	500
S_3	1	2	0	0	0	1	700

4- تحديد المتغير الداخل من خلال اختيار العامود الذي يقابل اكبر رقم بالسالب في دالة الهدف اذا كانت دالة الهدف (Max) والعامود الذي يقابل اكبر رقم موجب اذا كانت دالة الهدف (Min) اما اذا كانت الارقام متساوية نأخذ احدهما (X_1 , X_2) . ومن الجدول السابق نختار اكبر رقم بالسالب (-10)لان دالة الهدف (Max) اي نختار العامود (X_2) .

5-تحديد المتغير الخارج وذلك من خلال اختيار الصف الذي يقابل اقل رقم ناتج عن قسمة قيم الجانب الايمن (R.H.S) على ارقام العامود الداخل (X_2) والذي تم اختياره في الخطوة السابقة بغض النظر عن كون دالة الهدف (Max) او (Min) مع اهمال القيم السالبة و الصفرية وكالاتي:

المتغير الداخل

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	R.H.S/X_2
Z	-6	-10	-4	0	0	0	0	
S_1	1	1	1	1	0	0	1000	1000/1=1000
S_2	1	1	0	0	1	0	500	500/1=500
S_3	1	2	0	0	0	1	700	700/2=350

المتغير الخارج هو (S_3) لأنه يقابل اقل قيمة (350)

المتغير الخارج

العنصر المشترك

6--ايجاد العنصر المشترك (الرقم المحوري) وهو رقم (2) والناتج عن تقاطع العامود الداخل (X_2) مع الصف الخارج (S_3) (

7- ايجاد الصف المحوري من خلال قسمة الصف الخارج (S_3) على العنصر المشترك (الرقم المحوري) (2) وكالاتي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	
S_3	1	2	0	0	0	1	700	÷2
X_2	0.5	1	0	0	0	0.5	350	

الصف المحوري

8- نستخرج قيم الصفوف المتبقية الجديدة ل (Z) و (S_1) و (S_2)

نوجد قيم (Z) الجديدة من خلال طرح قيم (Z) القديمة من قيم الصف المحوري بعد ضربها بالرقم المقابل للمتغير الداخل وكالاتي:

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	-6	-10	-4	0	0	0	0
X_2	0.5	1	0	0	0	0.5	350

نضرب الصف المحوري بالرقم المقابل للمتغير الداخل -10

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	-6	-10	-4	0	0	0	0
X_2	-5	-10	0	0	0	-5	-3500
Z الجديدة	-1	0	-4	0	0	5	3500

نطرح قيم Z من قيم X2 لاستخراج قيم Z الجديدة

نوجد قيم (S_1) الجديدة من خلال طرح قيم (S_1) القديمة من قيم الصف المحوري بعد ضربها بالرقم المقابل للمتغير الداخل وكالاتي:

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_1	1	1	1	1	0	0	1000
X_2	0.5	1	0	0	0	0.5	350

نضرب الصف المحوري بالرقم المقابل للمتغير الداخل 1

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S1	1	1	1	1	0	0	1000
X_2	0.5	1	0	0	0	0.5	350
S1الجديدة	0.5	0	1	1	0	-0.5	650

نطرح قيم S1 من قيم X2 لاستخراج قيم S1الجديدة

نوجد قيم (S_2) الجديدة من خلال طرح قيم (S_2) القديمة من قيم الصف المحوري بعد ضربها بالرقم المقابل للمتغير الداخل وكالاتي:

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_2	1	1	0	0	1	0	500
X_2	0.5	1	0	0	0	0.5	350

نضرب الصف المحوري بالرقم المقابل للمتغير الداخل 1

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_2	1	1	0	0	1	0	500
X_2	0.5	1	0	0	0	0.5	350
S_2الجديدة	0.5	0	0	0	1	-0.5	150

نطرح قيم X2 من قيم S_2 لاستخراج قيم S_2 الجديدة

بعد ان تم استخراج القيم الجديدة للمتغيرات نكون جدول الحل الامثل وكالاتي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	-1	0	-4	0	0	5	3500
S_1	0.5	0	1	1	0	-0.5	650
S_2	0.5	0	0	0	1	-0.5	150
X_2	0.5	1	0	0	0	0.5	350

وبما ان قيم (Z) تحتوي على قيم سالبة فان هذا يعني اننا لم نصل الى الحل الامثل ولذلك نقوم بإعادة الخطوات السابقة من الخطوة الرابعة على هذا الجدول.

4-- تحديد المتغير الداخل من خلال اختيار العامود الذي يقابل اكبر رقم بالسالب في دالة الهدف ومن الجدول السابق نختار اكبر رقم بالسالب (4-)لان دالة الهدف (Max) اي نختار العامود (X_3) .

5-تحديد المتغير الخارج وذلك من خلال اختيار الصف الذي يقابل اقل رقم ناتج عن قسمة قيم الجانب الايمن (R.H.S) على ارقام العامود الداخل (X_3) والذي تم اختياره في الخطوة السابقة مع اهمال القيم السالبة والصفرية وكالاتي .

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	R.H.S/X_2
Z	-1	0	-4	0	0	5	3500	
S_1	0.5	0	1	1	0	-0.5	650	650/1=650
S_2	0.5	0	0	0	1	-0.5	150	150/0=0
X_2	0.5	1	0	0	0	0.5	350	350/0=0

المتغير الخارج هو (S_1) والذي يمثل اقل قيمة بعد استبعاد القيم الصفرية والسالبة.

6-ايجاد العنصر المشترك (الرقم المحوري) وهو رقم (1) والناتج عن تقاطع العامود الداخل (X_3) مع الصف الخارج (S_1)

7- ايجاد الصف المحوري من خلال قسمة الصف الخارج (S_1) على العنصر المشترك (الرقم المحوري) (1) وكالاتي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	
S_1	0.5	0	1	1	0	-0.5	650	÷1
X_3	0.5	0	1	1	0	-0.5	650	

الصف المحوري

8- نستخرج قيم الصفوف المتبقية الجديدة ل (Z) و (S_2) و(X_2)

نوجد قيم (Z) الجديدة من خلال طرح قيم (Z) القديمة من قيم الصف المحوري بعد ضربها بالرقم المقابل للمتغير الداخل وكالاتي:

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	-1	0	-4	0	0	5	3500
X_3	0.5	0	1	1	0	-0.5	650

نضرب الصف المحوري بالرقم المقابل للمتغير الداخل -4

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	-1	0	-4	0	0	5	3500
X_3	-2	0	-4	-4	0	2	-2600
Zالجديدة	1	0	0	4	0	3	6100

نطرح قيم Zمن قيم X_3 لاستخراج قيم Z الجديدة

نوجد قيم (S_2) الجديدة من خلال طرح قيم (S_2) القديمة من قيم الصف المحوري بعد ضربها بالرقم المقابل للمتغير الداخل وكالاتي:

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_2	0.5	0	0	0	1	-0.5	150
X_3	0.5	0	1	1	0	-0.5	650

نضرب الصف المحوري بالرقم المقابل للمتغير الداخل 0

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_2	0.5	0	0	0	1	-0.5	150
X_3	0	0	0	0	0	0	0
S_2الجديدة	0.5	0	0	0	1	-0.5	150

نطرح قيم S_2من قيم X_3 لاستخراج قيم S_2 الجديدة

نوجد قيم (X_2) الجديدة من خلال طرح قيم (X_2) القديمة من قيم الصف المحوري بعد ضربها بالرقم المقابل للمتغير الداخل وكالاتي:

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
X_2	0.5	1	0	0	0	0.5	350
X_3	0.5	0	1	1	0	-0.5	650

نضرب الصف المحوري بالرقم المقابل للمتغير الداخل 0

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
X_2	0.5	1	0	0	0	0.5	350
X_3	0	0	0	0	0	0	0
X_2الجديدة	0.5	1	0	0	0	0.5	350

نطرح قيم X_2من قيم X_3 لاستخراج قيم X_2الجديدة

نكون جدول الحل الامثل وكالاتي بالاعتماد على قيم المتغيرات الجديدة وكالاتي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	1	0	0	4	0	3	6100
X_3	0.5	0	1	1	0	-0.5	650
S_2	0.5	0	0	0	1	-0.5	150
X_2	0.5	1	0	0	0	0.5	350

وبما ان قيم (Z) صفر او موجبة فهذا يعني اننا قد توصلنا الى الحل الامثل والذي يمكن كتابته بالشكل الاتي :

Z=6100

X1=0

X2=350

X3=650

وهذا يعني ان صاحب الشركة اقصى ربح يمكن ان يصل اليه هو (6100) لان دالة الهدف تعظيم وان الكمية المنتجة من (X_1) هي (0) والكمية المنتجة من (X_2) هي (350) والكمية المنتجة من (X_3) هي (650)

مثال 3/ اوجد الحل الامثل لانموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة السمبلكس .

$$\text{Min } Z = -5X_1 - 3X_2+2X_3$$

S.T

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 5$$

$$X_1 - 2X_2 - 2X_3 \leq 4$$

$$3X_1+3X_2+2X_3 \leq 15$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

الحل : 1- تحويل نموذج البرمجة الخطية الى الطريقة القياسية .

$$\text{Min } Z = -5X_1 - 3X_2+2X_3+0S_1+0S_2+0S_3$$

S.T

$$X_1 + X_2 + X_3 + S_1= 5$$

$$X_1 - 2X_2 - 2X_3 + S_2= 4$$

$$3X_1+3X_2+2X_3 + S_3= 15$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

2- نقوم بتصفير دالة الهدف (Z)

$$\text{Min } Z + 5X_1 + 3X_2-2X_3-0S_1-0S_2-0S_3=0$$

3- تكوين جدول الحل الاساسي للمشكلة القياسية .

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	5	3	-2	0	0	0	0
S_1	1	1	1	1	0	0	5
S_2	1	-2	-2	0	1	0	4
S_3	3	3	2	0	0	1	15

4- تحديد المتغير الداخل من خلال اختيار العامود الذي يقابل اكبر رقم بالسالب في دالة الهدف اذا كانت دالة الهدف (Max) والعامود الذي يقابل اكبر رقم موجب اذا كانت دالة الهدف (Min) اما اذا كانت الارقام متساوية نأخذ احدهما (X_1 , X_2) . ومن الجدول السابق نختار اكبر رقم بالموجب (5)لان دالة الهدف (Min) اي نختار العامود (X_1) .

5-تحديد المتغير الخارج وذلك من خلال اختيار الصف الذي يقابل اقل رقم ناتج عن قسمة قيم الجانب الايمن (R.H.S) على ارقام العامود الداخل (X_1) والذي تم اختياره في الخطوة السابقة بغض النظر عن كون دالة الهدف (Max) او (Min) مع اهمال القيم السالبة و الصفرية وكالاتي .

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	R.H.S/X_1
Z	5	3	-2	0	0	0	0	
S_1	1	1	1	1	0	0	5	5/1=5
S_2	1	-2	-2	0	1	0	4	4/1=4
S_3	3	3	2	0	0	1	15	15/3=5

العنصر المشترك

المتغير الخارج هو (S_2) لأنه يقابل اقل قيمه (4)

6-ايجاد العنصر المشترك (الرقم المحوري) وهو رقم (1) والناتج عن تقاطع العامود الداخل (X_1) مع الصف الخارج (S_2)

7- ايجاد الصف المحوري من خلال قسمة الصف الخارج (S_2) على العنصر المشترك (الرقم المحوري) (1) وكالاتي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	
S_2	1	-2	-2	0	1	0	4	÷1
X_1	1	-2	-2	0	1	0	4	

الصف المحوري

8- نستخرج قيم الصفوف المتبقية الجديدة ل (Z) و (S_1) و (S_3)

نوجد قيم (Z) الجديدة من خلال طرح قيم (Z) القديمة من قيم الصف المحوري بعد ضربها بالرقم المقابل للمتغير الداخل وكالاتي:

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	5	3	-2	0	0	0	0
X_1	1	-2	-2	0	1	0	4

نضرب الصف المحوري بالرقم المقابل للعامود الداخل (5)

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	5	3	-2	0	0	0	0
X_1	5	-10	-10	0	5	0	20
Z الجديدة	0	13	8	0	-5	0	-20

نطرح قيم Zمن قيم X1 للحصول على قيم Z الجديدة

نوجد قيمة (S_1) الجديدة وبنفس الخطوات السابقة في استخراج قيم (Z) الجديدة وكالاتي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_1	1	1	1	1	0	0	5
X_1	1	-2	-2	0	1	0	4
S_1	1	1	1	1	0	0	5
X_1	1	-2	-2	0	1	0	4
S_1 الجديدة	0	3	3	1	-1	0	1

نضرب قيم الصف المحوري بالرقم المقابل للعامود الداخل 1

نطرح قيم S1 من قيم X1 للحصول على قيم S1 الجديدة

نوجد قيمة (S3) الجديدة وبنفس الخطوات السابقة في استخراج قيم (Z) الجديدة وكالاتي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_3	3	3	2	0	0	1	15
X_1	1	-2	-2	0	1	0	4
S_3	3	3	2	0	0	1	15
X_1	3	-6	-6	0	3	0	12
S_3 الجديدة	0	9	8	0	-3	1	3

نضرب قيم الصف المحوري بالرقم المقابل للعامود الداخل 3

نطرح قيم S3 من قيم X1 للحصول على قيم S3 الجديدة

بعد ان تم استخراج قيم جميع الصفوف الجديدة نكون جدول الحل الامثل فاذا كانت جميع قيم (Z) في الجدول موجبة ودالة الهدف (Max) فأننا قد توصلنا الى الحل الامثل ، اما اذا كانت جميع قيم (Z) سالبة ودالة الهدف (Min) فأننا قد توصلنا الى الحل الامثل وبخلاف ذلك يتم اعادة نفس الخطوات السابقة :.

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	0	13	8	0	-5	0	-20
S_1	0	3	3	1	-1	0	1
X_1	1	-2	-2	0	1	0	4
S_3	0	9	8	0	-3	1	3

وبما ان قيم (Z) تحتوي على قيم موجبة فان هذا يعني اننا لم نصل الى الحل الامثل ولذلك نقوم بإعادة الخطوات السابقة من الخطوة الرابعة على هذا الجدول.

4-- تحديد المتغير الداخل من خلال اختيار العامود الذي يقابل اكبر رقم بالموجب في دالة الهدف ومن الجدول السابق نختار اكبر رقم بالموجب (13)لان دالة الهدف (Min) اي نختار العامود (X_2) .

5-تحديد المتغير الخارج وذلك من خلال اختيار الصف الذي يقابل اقل رقم ناتج عن قسمة قيم الجانب الايمن (R.H.S) على ارقام العامود الداخل (X_2) والذي تم اختياره في الخطوة السابقة مع اهمال القيم السالبة والصفرية وكالاتي .

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	R.H.S/x_2
Z	0	13	8	0	-5	0	-20	
S_1	0	3	3	1	-1	0	1	1/3=0.33
X_1	1	-2	-2	0	1	0	4	4/-2=-2
S_3	0	9	8	0	-3	1	3	3/9=0.33

المتغير الخارج هو (S_1) والذي يمثل اقل قيمة بعد استبعاد القيم الصفرية والسالبة.

6-ايجاد العنصر المشترك (الرقم المحوري) وهو رقم (3) والناتج عن تقاطع العامود الداخل (X_2) مع الصف الخارج (S_1)

7- ايجاد الصف المحوري من خلال قسمة الصف الخارج (S_1) على العنصر المشترك (الرقم المحوري) (3) وكالاتي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	
S_1	0	3	3	1	-1	0	1	÷3
X_2	0	1	1	0.33	-0.33	0	0.33	

الصف المحور

8- نستخرج قيم الصفوف المتبقية الجديدة ل (Z) و (x_1) و(S_3) وبنفس الخطوات السابقة لنحصل على جدول الحل الامثل الاتي

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	0	0	-5	-4.2	-0.71	0	-24.2
X_2	0	1	1	0.33	-0.33	0	0.33
X_1	1	0	0	0.66	0.33	0	4.66
S_3	0	0	-1	-3	0	1	0

وبما ان قيم دالة الهدف (Z) هي قيم سالبة او صفر فهذا يعني اننا قد توصلنا الى الحل الامثل و الذي يمكن كتابته بالشكل الاتي

$Z= -24.2$

$X_1=4.66$

$X_2=0.33$

$X3=0$

مثال 4 : واجب / اوجد الحل الامثل لأنموذج البرمجة الخطية

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 4X_2 + 3X_3$$

S.T

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 960$$

$$5X_1 + 8X_2 + 4X_3 \leq 5000$$

$$3X_1 + 6X_2 + 3X_3 \leq 2400$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

ومن خلال استخدام خطوات الحل المطبقة في الامثلة السابقة نصل الى الحل الامثل والذي يمكن كتابته بالشكل الاتي :

$$Z=2400$$

$$X_1=80$$

$$X_2=0$$

$$X_3=720$$

انموذج النقل والتخصص وطرائق تقييمها

وجدت طريقة النقل للتوصل إلى أسلوب أو برنامج يساعد على تحريك السلع والمستلزمات من مصادرها إلى أماكن استخدامها ، وكذلك بغية توزيع المنتجات المصنعة إلى أماكن توزيعها وبيعها لغرض التقليل من النفقات الخاصة إلى أدنى حد ممكن . أن مشكلة النقل تهتم بإيجاد أسلوب أمثل لتوزيع(نقل أو شحن) سلعه ما من مناطق إنتاجها (عرضها) إلى مناطق استهلاكها (اطلبها) وبأقل كلفة ممكنة وهي حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية . وتتمثل المشكلة أساسية في حالة تعدد المصادر (Sources) ومراكز الطلب (الاستهلاك) (Destination) والمطلوب النقل بينهما ، ويزداد تعقيد المشكلة مع تعدد مراكز الطلب الاستهلاك) . فعند زيادة هذه المراكز تزداد البدائل المتاحة مما يؤثر على صعوبة تقييمها للوصول إلى أدنى الكلف ، وضعت هذه الأفكار في عام 1941 ، وتطورت على يد عالم الرياضيات الأمريكي (دانتزنيج) عام 1953 ، ويفترض أن كل المتغيرات الموجودة قيد الدراسة ضمن مصفوفة النقل هي كميات موجبة أو صفرية.

طرق ايجاد الحل الاساسى المقبول لأنموذج النقل

بغية الوصول إلى حل أساسي مقبول لأنموذج النقل لا يتعارض مع طبيعة المشكلة المدروسة ، ومنه يمكن الانطلاق إلى حل أمثل . هناك عدة طرق تختلف من حيث الوقت والجهد المطلوب للوصول الى حل اولي ، وسيتم التطرق إلى الطرق الثلاثة الأكثر استخداماً وشيوعا للحصول على الحل الأساسي المقبول وليس للحصول على الحل الامثل.

اولاً :طريقة الركن الشمالي الغربي North West Corner Method

تعد هذه الطريقة من أسهل الطرائق على الإطلاق ، حيث لا تأخذ بنظر الاعتبار الكلف ، ولا يستخدم فيها أي منطق علمي في عملية توزيع الكميات المتاحة من حيث العرض والطلب . وتتلخص خطوات هذه الطريقة بما يلي

1. لابد أن يكون الأنموذج متوازن.
2. أبدا بأول مربع من جهة اليسار
3. نطرح كمية المواد من الطلب او العرض ونصفر كمية المواد باتجاه الطلب اذا كانت كمية الطلب مستنفذة اي مساوية للصفر او باتجاهك العرض اذا كانت كمية العرض مستنفذة .
4. ننتقل الى المربع التالي سواء كان طلب ام عرض.

5. اذا كانت كمية المواد في احد المربعات مستنفذة نتجاوزه.

6. نكرر الخطوات اعلاه ثم نحسب الكلفة الكلية مع مراعاة ان عدد الخلايا المشغولة n+m-1 .

مثال 1/ اوجد الحل الاساسي المقبول من مصفوفة النقل التالية باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي :

To / From	D1	D2	D3	D4	SUPPLY
S1	20	16	14	20	9
S2	9	15	16	10	8
S3	8	13	5	9	7
S4	9	6	5	11	5
DEMAND	5	10	5	9	29

الحل : بما ان النموذج متوازن اي ان الكميات المطلوبة تساوي الكميات المعروضة وتساوي (29) فعلية فان الحل الاساسي المقبول لمصفوفة النقل هو كالاتي :

To / From	D1	D2	D3	D4	SUPPLY
S1	20 5	16 4	14	20	9 4 0
S2	9	15 6	16 2	10	8 2 0
S3	8	13	5 3	9 4	7 4 0
S4	9	6	5	11 5	5 0
DEMAND	5 0	10 6 0	5 3 0	9 5 0	29

وان (N+M-1=7)حيث تمثل M عدد الصفوف وتمثل N عدد الاعمدة وان مجموع عدد المصادر ومراكز الاستلام (المراكز المشغولة)تساوي سبعة بمعنى ان الكلفة الكلية :

$$\text{Min } Z = 5*20+4*16+6*15+2*16+3*5+4*9+5*11=392$$

مثال 2/ اوجد الحل الاساسي المقبول من مصفوفة النقل التالية باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي :

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	11	10	7	250
S2	8	9	12	300
S3	13	6	5	300
DEMAND	300	200	200	850 / 700

الحل : بما ان النموذج غير متوازن اي ان الكميات المطلوب (700) لا تساوي الكميات المعروضة (850) وعليه سيتم اضافة مركز استلام وهمي وبكلفة مقدارها صفر والمركز الوهمي هو :

D4 = 850-700=150

وعليه فان مصفوفة النقل سوف تصبح بالشكل الاتي :

To / From	D1	D2	D3	D4	SUPPLY
S1	11	10	7	0	250
S2	8	9	12	0	300
S3	13	6	5	0	300
DEMAND	300	200	200	150	850

نقوم بتطبيق الخطوات السابقة للوصول الى الحل الاساسي

To / From	D1	D2	D3	D4	SUPPLY
S1	11 250	10	7	0	250 0
S2	8 50	9 200	12 50	0	300 250 50 0
S3	13	6	5 150	0 150	300 150 0
DEMAND	300 50 0	200 0	200 150 0	150 0	850

وان (N+M-1=6) وان مجموع عدد المصادر ومراكز الاستلام (المراكز المشغولة)تساوي ست خلايا بمعنى ان الكلفة الكلية :

$$\text{Min } Z = 250*11+50*8+200*9+50*12+150*5=630$$

ثانياً : طريق اقل كلفة Cost Method

وتسمى أيضا بالطريقة الحدسية (Intuitive Approach) وكذلك بالطريقة ذات الأقل كلفة للمصفوفة (Minimum Matrix Method) هي طريقة أفضل من الطريقة السابقة حيث تأخذ بنظر الاعتبار كلفة النقل من المصدر إلى المركز ، وتتلخص خطوات هذه الطريقة بما يلي

1- لابد أن يكون الأنموذج متوازن .
2- يتم تحدد الخلية ذات كلفة أقل في المصفوفة ككل وخصص لها اقل كمية ممكنة . وفي حالة وجود أكثر من خلية ذات كلفة اقل ، نختار تلك الخلية التي يمكن نقل أكبر كمية ممكنة من خلالها.
3- نطرح كمية المواد من المصدر العرض (الصف) أو من مركز الطلب (العمود) من الكمية المراد نقلها.
4- إذا كان المتوفر من المصدر (الصف) قد استنفذ يتم تجاوزه ، وإذا تم تلبية الطلب (العمود) فيتم تجاوزه ايضاً .
5- كرر ما ورد أعلاه ، ثم احسب الكلفة الكلية . مع مراعاة أن عدد الخلايا المشغولة $n + m - 1$.

مثال 1/ اوجد الحل الاساسي المقبول من مصفوفة النقل التالية باستخدام طريقة اقل كلفة :

To / From	D1	D2	D3	D4	SUPPLY
S1	20	16	14	20	9
S2	9	15	16	10	8
S3	8	13	5	9	7
S4	9	6	5	11	5
DEMAND	5	10	5	9	29

الحل : بما ان النموذج الكميات المطلوبة تساوي الكميات المعروضة وتساوي (29) فعلية فان الحل الاساسي لمصفوفة النقل هو كالاتي :

To / From	D1	D2	D3	D4	SUPPLY
S1	20	16 5	14	20 4	9 4 0
S2	9 3	15	16	10 5	8 5 0
S3	8 2	13	5 5	9	7 2 0
S4	9	6 5	5	11	5 0
DEMAND	5 3 0	10 5 0	5 0	9 4 0	29

وان $(N+M-1=7)$ وان مجموع عدد المصادر ومراكز الاستلام (المراكز المشغولة)تساوي سبعة بمعنى ان الكلفة الكلية :

$$Min\ Z = 5*16+4*20+3*9+5*10+2*8+5*5+5*6=308$$

ثالثاً : طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation

وتتلخص خطوات هذه الطريقة بما يلي

1. لابد أن يكون الأنموذج متوازن
2. بناء عمود فرق للصفوف بعدها يتم حساب الفرق بين أقل كلفتين السطر المناظر
3. بناء سطر فرق للأعمدة ، بعدها يتم حساب الفرق بين أقل كلفتين للعمود المناظر
4. تحديد أعلى فرق للأسطر أو الأعمدة ، عندها يتم اختيار واشباع الخلية ذات اقل كلفة مناظرة من الصف (العرض) أو العمود (الطلب) لتصبح الكمية المراد نقلها.
5. نستبعد الصف أو العمود الذي تم إشباعه أو الذي أخذ حاجته حتى لا يدخل في الحساب من جديد
6. نكرر الخطوات السابقة ثم نحسب الكلفة الكلية ، مع مراعاة أن عدد الخلايا المشغولة $n + m - 1$

مثال 1: أوجد الحل الأساسي المقبول من مصفوفة النقل أدناه مستخدما طريقة فوجل التقريبية .

To / From	D1	D2	D3	D4	SUPPLY
S1	20	16	14	20	9
S2	9	15	16	10	8
S3	8	13	5	9	7
S4	9	6	5	11	5
DEMAND	5	10	5	9	29

الحل : بما ان النموذج لكميات المطلوبة تساوي الكميات المعروضة وتساوي (29) فعلية فان الحل الاساسي لمصفوفة النقل هو كالاتي :

To / From	D1	D2	D3	D4	SUPPLY	
S1	20	16 5	14	20 4	9 4 0	2 2 4 0 0
S2	9 3	15	16	10 5	8 5 0	1 1 1 1 1
S3	8 2	13	5 5	9	7 2	3 3 1 1
S4	9	6 5	5	11	5 0	1
DEMAND	5 3 0	10 5 0	5 0	9 4 0	29	
	1 1 1 1 11	7 2 2	0 9	1 1 1 1 10 10		

وعليه فان الحل الاساسي المقبول لمصفوفة النقل هو كالاتي :

Min Z =5*16+4*20+3*9+5*10+2*8+5*5+5*6=308

تمرين: أوجد الحل الأساسي المقبول من مصفوفة النقل أدناه مستخدما الطرق الثلاث .

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	14	12	10	1400
S2	15	17	13	1500
S3	11	13	12	1550
DEMAND	1200	1600	1650	4450

الحل : اولاً : طريقة الركن الشمالي الغربي

بما ان النموذج متوازن اي ان الكميات المطلوبة تساوي الكميات المعروضة وتساوي (4450) فعلية فان الحل الاساسي المقبول لمصفوفة النقل هو كالاتي :

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	14 1200	12 200	10	1400 200 0
S2	15	17 1400	13 100	1500 100 0
S3	11	13	12 1550	1550 0
DEMAND	1200 0	1600 1400 0	1650 1550 0	4450

وان (N+M-1=5)حيث تمثل M عدد الصفوف وتمثل N عدد الاعمدة وان مجموع عدد المصادر ومراكز الاستلام (المراكز المشغولة)تساوي خمسة بمعنى ان الكلفة الكلية :

Min Z = 1200*14+200*12+1400*17+100*13+1550*12=62900

ثانياً : طريقة اقل كلفة

الحل : بما ان النموذج متوازن اي ان الكميات المطلوبة تساوي الكميات المعروضة وتساوي (4450) فعلية فان الحل الاساسي المقبول لمصفوفة النقل هو كالاتي :

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	14	12	10 1400	1400 0
S2	15	17 1500	13	1500 0
S3	11 1200	13 100	12 250	1550 350 100 0
DEMAND	1200 0	1600 1500 0	1650 250 0	4450

وان (N+M-1=5)حيث تمثل M عدد الصفوف وتمثل N عدد الاعمدة وان مجموع عدد المصادر ومراكز الاستلام (المراكز المشغولة)تساوي خمسة بمعنى ان الكلفة الكلية :

Min Z=1400*10+1500*17+1200*11+100*13+250*12=57000

ثالثاً : طريقة فوجل :

الحل : بما ان النموذج متوازن اي ان الكميات المطلوبة تساوي الكميات المعروضة وتساوي (4450) فعلية فان الحل الاساسي المقبول لمصفوفة النقل هو كالاتي :

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY	
S1	14	12 1250	10 150	1400 1250 0	2 2 2
S2	15	17	13 1500	1500 0	2 4
S3	11 1200	13 350	12	1550 350 0	1 1 1
DEMAND	1200 0	1600 350 0	1650 150 0	4450	
	3	1 1 1 1	2 2 2		

وان (N+M-1=5)حيث تمثل M عدد الصفوف وتمثل N عدد الاعمدة وان مجموع عدد المصادر ومراكز الاستلام (المراكز المشغولة)تساوي خمسة بمعنى ان الكلفة الكلية :

$$Min\ Z = 1250*12+150*10+1500*13+1200*11+350*13=53750$$

طرق اختيار الحل الامثل لأنموذج النقل

لاختبار وتطوير الحل الاساسي المقبول يجب تحقيق الشرط (N+M-1) هو عدد الصفوف زائد عدد الاعمدة ناقص واحد يساوي عدد الخلايا المشغولة للشروع في اختيار امثليه الحل هناك طريقتان لاختيار امثليه الحل لأنموذج النقل وهما .

1-طريق المسار المتعرج Stepping Stone method

2- طريقة التوزيع المعدل Modeified distribufion

اولاً : طريق المسار المتعرج Stepping Stone method

تسمى المربعات المشغولة في مشكلات النقل بالمتغيرات الاساسية والمربعات غير المشغولة بالمتغيرات غير الاساسية حيث تحسب طريقة المسار المتعرج التكاليف غير المباشرة في كل مربع غير مشغول لمعرفة هل ان المربعات غير المشغولة يمكن الاستفادة منها في النقل بدلاً من بعض المربعات المشغولة لتدخل ضمن المتغيرات الاساسية فاذا وجدنا ان ملئ خلية غير مشغولة يؤدي الى خفض تكاليف النقل فانه يتم تعديل جدول النقل الاولي وهكذا تستمر عملية التقييم الى ان يتضح ان شغل اي خلية فارغة لن يؤدي الى تخفيض تكاليف النقل.

مثال 1: اذا كان لديك جدول الحل الاولي لمشكلة النقل فهل هناك امكانية لتحسين الحل باتجاه النتيجة المثلى بموجب طريقة المسار المتعرج .

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5 9	1 3	8	12
S2	2	4 7	0 7	14
S3	3	6	7 4	4
DEMAND	9	10	11	30

Min Z = 9*5+3*1+7*4+7*0+4*7=104

<u>الحل :</u> بما ان الشرط (N+M-1) اي (3+3-1=5) هو عدد الصفوف زائد عدد الاعمدة ناقص واحد يساوي عدد الخلايا المشغولة متحقق فأننا نشرع في ايجاد الحل الامثل وكالاتي .

1-نكون مسارات مغلقة على شكل مربعات او مستطيلات او كلاهما على ان يكون المربع الفارغ محدد بثلاث زوايا لمربعات مملوءة

الكلف	المسار
C13 = +8-0+4-1=11	+X13 - X23 +X22 -X12
C21=+2-4+1-5=-6	+X21 -X22 +X12 - X11
C31=+3-7+0-4+1-5=-12	+X31 -X33 +X23 -X22 +X12 -X11
C32=+6-7+0-4=-5	+X32 - X33 +X23 -X22

بما انه هناك قيم سالبة فهذا يعني ان الحل السابق ليس الحل الامثل

2-نحدد المتغير الداخل (الخلية الداخلة) وهو يمثل اقل كلفة نقل لمسارات الخلايا غير المشغولة بما انه هناك قيم سالبة نختار المسار الثالث لأنه يحتوي على اكبر رقم بالسالب (-12) لتكون الخلية (X31) هي الخلية الداخلة للحل

نرسم المسارات

المسار الاول +X13 - X23 +X22 -X12

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5 9	1 3	8	12
S2	2	4 7	0 7	14
S3	3	6	7 4	4
DEMAND	9	10	11	30

المسار الثاني - X11 +X12 -X22 +X21

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5 9	1 3	8	12
S2	2	4 7	0 7	14
S3	3	6	7 4	4
DEMAND	9	10	11	30

المسار الثالث -X11 +X12 -X22 +X23 -X33 + X31

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5 9	1 3	8	12
S2	2	4 7	0 7	14
S3	3 +	6	7 4	4
DEMAND	9	10	11	30

المسار الرابع -X22 +X23 - X33 +X32

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5 9	1 3	8	12
S2	2	4 7	0 7	14
S3	3	6	7 4	4
DEMAND	9	10	11	30

3-نحدد المتغير الخارج وذلك من خلال التعديل المطلوب على الكميات المنقولة لمسار المتغير الداخل وستتم معالجة الخلايا السالبة فقط وذلك من خلال اخذ اقل كمية شحن (اقل كمية منقولة) ليتم اضافتها الى الخلايا الموجبة او طرحها من الخلايا السالبة وكما موضح ادناه .

المسار الثالث

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5 -9	1 +3	8	12
S2	2	4 -7	0 +7	14
S3	3 +	6	7 -4	4
DEMAND	9	10	11	30

الخلية الخارجة هي (X33) لأنها تحتوي على اقل رقم بالسالب لتصبح لدينا مصفوفة النقل الجديدة بالشكل الاتي

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5 5	1 7	8	12
S2	2	4 3	0 11	14
S3	3 4	6	7	4
DEMAND	9	10	11	30

نختبر امثليه الحل من جديد وذلك من خلال اعادة نفس الخطوات السابقة على مصفوفة النقل الجديدة.

نكون مسارات مغلقة على شكل مربعات او مستطيلات او كلاهما على ان يكون المربع الفارغ محدد بثلاث زوايا لمربعات مملوءة

الكلف	المسار
C13 = +8-0+4-1=11	+X13 - X23 +X22 -X12
C21=+2-4+1-5=-6	+X21 -X22 +X12 - X11
C32=+6-1+5-3=7	+X32 -X12 +X11 -X31

بما انه هناك قيم سالبة فهذا يعني اننا لم نصل الى الحل الامثل

نحدد المتغير الداخل (الخلية الداخلة) و هو يمثل اقل كلفة نقل لمسارات الخلايا غير المشغولة بما انه هناك قيم سالبة نختار المسار الثاني لأنه يحتوي على اكبر رقم بالسالب (-6) لتكون الخلية (X21) هي الخلية الداخلة للحل

نرسم فقط المسار الثاني لأنه يحتوي على اكبر رقم بالسالب

+X21 -X22 +X12 - X11

To From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5 -5	1 +7	8	12
S2	2 +	4 -3	0 11	14
S3	3 4	6	7	4
DEMAND	9	10	11	30

نحدد المتغير الخارج وذلك من خلال التعديل المطلوب على الكميات المنقولة لمسار المتغير الداخل وستتم معالجة الخلايا السالبة فقط وذلك من خلال اخذ اقل كمية شحن (اقل كمية منقولة) ليتم اضافتها الى الخلايا الموجبة او طرحها من الخلايا السالبة لتتحدد الخلية الخارجة وهي (X22) وتصبح مصفوفة النقل الجديدة بالشكل الاتي .

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5 2	1 10	8	12
S2	2 3	4	0 11	14
S3	3 4	6	7	4
DEMAND	9	10	11	30

نختبر امثليه الحل من جديد من خلال تكوين مسارات جديدة على مصفوفة النقل الجديدة

المسار	الكلف
+X13 - X23 +X21 -X11	C13 = +8-0+2-5=5
+X32 -X12 +X11 -X31	C32=+6-1+5-3=7

وبما ان جميع قيم المسارات موجبة او صفر فالحل هو حل امثل وكلفته تساوي

Min Z = 2*5+10*1+3*2+11*0+4*3=38

مثال 2/ مثال : اذا كان لديك جدول الحل الاولي لمشكلة النقل فهل هناك امكانية لتحسين الحل باتجاه النتيجة المثلى بموجب طريقة المسار المتعرج .

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	16 180	20 20	12	200
S2	14	8 100	18 60	160
S3	26	24	16 90	90
DEMAND	180	120	150	450

Min Z = 180*16+20*20+100*8+60*16+90*16=6600

الحل : بما ان الشرط (N+M-1) اي (3+3-1=5) هو عدد الصفوف زائد عدد الاعمدة ناقص واحد يساوي عدد الخلايا المشغولة متحقق فأننا نشرع في ايجاد الحل الامثل وكالاتي .

1-نكون مسارات مغلقة على شكل مربعات او مستطيلات او كلاهما على ان يكون المربع الفارغ محدد بثلاث زوايا لمربعات مملوءة

المسار	الكلف
+X13 - X23 +X22 -X12	C13 =+12-18+8-20=-18
+X21 -X22 +X12 - X11	C21=+14-8+20-16=10
+X31 -X33 +X23 -X22 +X12 -X11	C31= +26-16+18-8+20-16=40
+X32 - X33 +X23 -X22	C32=+24-16+18-8=

بما انه هناك قيم سالبة فهذا يعني ان الحل السابق ليس الحل الامثل

2-نحدد المتغير الداخل (الخلية الداخلة) وهو يمثل اقل كلفة نقل لمسارات الخلايا غير المشغولة بما انه هناك قيم سالبة نختار المسار الاول لأنه يحتوي على اكبر رقم بالسالب (-18) لتكون الخلية (X13) هي الخلية الداخلة للحل

نرسم مسار الخلية (X13) لأنها تحتوي على اكبر رقم سالب

+X13 - X23 +X22 -X12

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	16 180	20 -20	12 +	200
S2	14	8 +100	18 -60	160
S3	26	24	16 90	90
DEMAND	180	120	150	450

نحدد المتغير الخارج وذلك من خلال التعديل المطلوب على الكميات المنقولة لمسار المتغير الداخل وستتم معالجة الخلايا السالبة فقط وذلك من خلال اخذ اقل كمية شحن (اقل كمية منقولة) ليتم اضافتها الى الخلايا الموجبة او طرحها من الخلايا السالبة لتتحدد الخلية الخارجة وهي (X12) وتصبح مصفوفة النقل الجديدة بالشكل الاتي

From \ To	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	16 180	20	12 20	200
S2	14	8 120	18 40	160
S3	26	24	16 90	90
DEMAND	180	120	150	450

نختبر امثليه الحل من جديد من خلال تكوين مسارات جديدة على مصفوفة النقل الجديدة

المسار	الكلف
+X21 -X23 +X13 - X11	C21=+14-18+20-16=-8
+X31 -X11 +X13 -X33	C31=+26-16+12-16=6
+X32 - X33 +X23 -X22	C32=+24-16+18-8=18

بما انه هناك قيم سالبة فهذا يعني ان الحل السابق ليس الحل الامثل

نحدد المتغير الداخل (الخلية الداخلة) وهو يمثل اقل كلفة نقل لمسارات الخلايا غير المشغولة بما انه هناك قيم سالبة نختار المسار الاول لأنه يحتوي على اكبر رقم بالسالب (-8) لتكون الخلية (X21) هي الخلية الداخلة للحل

نرسم مسار الخلية (X21)لأنها تحتوي على اكبر رقم سالب

+X21 -X23 +X13 - X11

From \ To	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	16 -180	20	12 +20	200
S2	14 +	8 120	18 -40	160
S3	26	24	16 90	90
DEMAND	180	120	150	450

نحدد المتغير الخارج وذلك من خلال التعديل المطلوب على الكميات المنقولة لمسار المتغير الداخل وستتم معالجة الخلايا السالبة فقط وذلك من خلال اخذ اقل كمية شحن (اقل كمية منقولة) ليتم اضافتها الى الخلايا الموجبة او طرحها من الخلايا السالبة لتتحدد الخلية الخارجة وهي (X23) وتصبح مصفوفة النقل الجديدة بالشكل الاتي

From \ To	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	16 140	20	12 60	200
S2	14 40	8 120	18	160
S3	26	24	16 90	90
DEMAND	180	120	150	450

نختبر امثليه الحل من جديد من خلال تكوين مسارات جديدة على مصفوفة النقل الجديدة

الكلف	المسار
C31=+26-16+12-16=6	+X31 -X11 +X13 -X33
C32=+24-8+14-16+12-16=10	+X32 - X22 +X21 -X11 +X13 -X33

وبما ان جميع قيم المسارات موجبة او صفر فالحل هو حل امثل وكلفته تساوي

Min Z =140*16+60*12+40*14+120*8+90*16 =5920

ثانياً :طريقة التوزيع المعدل Modeified distribufion

وتسمى ايضا بطريقة المضاعفات وتعتمد هذه الطريقة على اساس افتراض المتغيرات الثنائية لكلف النقل اذ تستخدم هذه المتغيرات لتقييم المربعات غير المشغولة وخطوات هذه الطريقة هي نفسها خطوات الطريقة السابقة لكن الاختلاف الرئيسي بينهما يتعلق بالطريقة التي تقييم خلايا المتغير الاساسي .كما تعد هذه الطريقة اسهل من الطريقة السابقة (طريقة المسار المتعرج) ولها تطبيقات واسعة باستخدام الحاسبات الالكترونية خاصة ويمكن توضيح طريقة عمل هذه الطريقة من خلال المثال الاتي:

مثال 1: اذا كان لديك جدول الحل الاولي لمشكلة النقل فهل هناك امكانية لتحسين الحل باتجاه النتيجة المثلى بموجب طريقة التوزيع المعدل .

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5 9	1 3	8	12
S2	2	4 7	0 7	14
S3	3	6	7 4	4
DEMAND	9	10	11	30

Min Z = 9*5+3*1+7*4+7*0+4*7=104

الحل : بما ان الشرط (N+M-1) اي (3+3-1=5) هو عدد الصفوف زائد عدد الاعمدة ناقص واحد يساوي عدد الخلايا المشغولة متحقق فأننا نشرع في ايجاد الحل الامثل وكالاتي .

1- يتم حساب قيم (Ui,Vj) اي المضاعفات لكل صف وعامود ولجميع الخلايا المشغولة (المتغيرات الاساسية) بافتراض ان (U1=0) وفقاً للقانون التالي.

$C_{ij}=U_i+V_j$

$C_{11}=U_1+V_1$ $\qquad$ $5=0+V_1$ $\qquad$ $V_1=5-0=5$

$C_{12}=U_1+V_2$ $\quad\quad$ $1=0+V_2$ $\quad\quad$ $V_2=1-0=1$

$C_{22}=U_2+V_2$ $\quad\quad$ $4=U_2+1$ $\quad\quad$ $U_2=4-1=3$

$C_{23}=U_2+V_3$ $\quad\quad$ $0=3+V_3$ $\quad\quad$ $V_3=0-3=-3$

$C_{33}=U_3+V_3$ $\quad\quad$ $7=U_3-3$ $\quad\quad$ $U_3=7+3=10$

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY	
S1	5 9	1 3	8	12	U1=0
S2	2	4 7	0 7	14	U2=3
S3	3	6	7 4	4	U3=10
DEMAND	9	10	11	30	
	V1=5	V2=1	V3=-3		

1- يتم حساب الكلف للخلايا غير المشغولة وفقاً للقانون الاتي :

$$\bar{C}_{ij}=C_{ij}-(U_i+V_j)$$

وعليه فان

$\bar{C}_{13}=C_{13}-(U_1+V_3)$ $\quad\quad$ $\bar{C}_{13}=8-(0-3)=11$

$\bar{C}_{21}=C_{21}-(U_2+V_1)$ $\quad\quad$ $\bar{C}_{21}=2-(3+5)=-6$

$\bar{C}_{31}=C_{31}-(U_3+V_1)$ $\quad\quad$ $\bar{C}_{31}=3-(10+5)=-12$

$\bar{C}_{32}=C_{32}-(U_3+V_2)$ $\quad\quad$ $\bar{C}_{32}=6-(10+1)=-5$

2- نقوم بتحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج ، وعليه فان المتغير الداخل هو (X_{31}) لان كلفته (-12) ، اما المتغير الخارج فيتم تحديده من خلال التعديل المطلوب على الكمية المنقولة لمسار المتغير الداخل ومن خلال طريقة المسار المتعرج وكالاتي :

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5 -9	1 +3	8	12
S2	2	4 -7	0 +7	14
S3	3 +	6	7 -4	4
DEMAND	9	10	11	30

وعلية فان المتغير الخارج (X33) ولا ضرورة لحساب مسارة مرة ثانية لتصبح مصفوفة النقل الجديدة بعد تعديل الخلايا بالشكل الاتي

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5 5	1 7	8	12
S2	2	4 3	0 11	14
S3	3 4	6	7	4
DEMAND	9	10	11	30

يتم اعادة نفس الخطوات السابقة على مصفوفة النقل الجديدة ويتم تكرارها لحين التخلص من القيم السالبة ل (Cij) وبمعنى اخر ان قيم (Cij) تكون جميعها اكبر او مساوية للصفر.

يتم حساب قيم (Ui,Vj) مرة ثانية لجميع الخلايا المشغولة (المتغيرات الاساسية) بافتراض ان (U1=0) وفقاً للقانون التالي

$C_{ij}=U_i+V_j$

$C_{11}=U_1+V_1$ $\qquad$ $5=0+V_1$ $\qquad$ $V_1=5-0=5$

$C12=U1+V2 \qquad 1=0+V2 \qquad V2=1-0=1$

$C22=U2+V2 \qquad 4=U2+1 \qquad U2=4-1=3$

$C23=U2+V3 \qquad 0=3+V3 \qquad V3=0-3=-3$

$C31=U3+V1 \qquad 3=U3+5 \qquad U3=3-5=-2$

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY	
S1	5 5	1 7	8	12	U1=0
S2	2	4 3	0 11	14	U2=3
S3	3 4	6	7	4	U3=-2
DEMAND	9	10	11	30	
	V1=5	V2=1	V3=-3		

1- يتم حساب الكلف للخلايا غير المشغولة وفقاً للقانون الاتي :

$\bar{C}ij=Cij-(Ui+Vj)$

وعليه فان

$\bar{C}13=C13-(U1+V3) \qquad \bar{C}13=8-(0-3)=11$

$\bar{C}21=C21-(U2+V1) \qquad \bar{C}21=2-(3+5)=-6$

$\bar{C}32=C32-(U3+V2) \qquad \bar{C}32=6-(-2+1)=7$

نقوم بتحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج ، وعليه فان المتغير الداخل هو (X21) لان كلفته (-6) ، اما المتغير الخارج فيتم تحديده من خلال التعديل المطلوب على الكمية المنقولة لمسار المتغير الداخل ومن خلال طريقة المسار المتعرج وكالاتي :

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5 -5	1 +7	8	12
S2	2 +	4 -3	0 11	14
S3	3 4	6	7	4
DEMAND	9	10	11	30

وعلية فان المتغير الخارج (X22) ولا ضرورة لحساب مسارة مرة ثانية لتصبح مصفوفة النقل الجديدة بعد تعديل الخلايا بالشكل الاتي

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5 2	1 10	8	12
S2	2 3	4	0 11	14
S3	3 4	6	7	4
DEMAND	9	10	11	30

يتم اعادة نفس الخطوات السابقة على مصفوفة النقل الجديدة ويتم تكرارها لحين التخلص من القيم السالبة ل (Cij) وبمعنى اخر ان قيم (Cij) تكون جميعها اكبر او مساوية للصفر.

يتم حساب قيم (Ui,Vj) مرة ثانية لجميع الخلايا المشغولة (المتغيرات الاساسية) بافتراض ان (U1=0) وفقاً للقانون التالي

$Cij=Ui+Vj$

$C11=U1+V1$ $\quad$ $5=0+V1$ $\quad$ $V1=5-0=5$

$C12=U1+V2 \qquad 1=0+V2 \qquad V2=1-0=1$

$C21=U2+V1 \qquad 2=U2+5 \qquad U2=2-5=-3$

$C23=U2+V3 \qquad 0=-3+V3 \qquad V3=0+3=3$

$C31=U3+V1 \qquad 3=U3+5 \qquad U3=3-5=-2$

To From	D1	D2	D3	SUPPLY	
S1	5 2	1 10	8	12	U1=0
S2	2 3	4	0 11	14	U2=-3
S3	3 4	6	7	4	U3=-2
DEMAND	9	10	11	30	
	V1=5	V2=1	V3=3		

يتم حساب الكلف للخلايا غير المشغولة وفقاً للقانون الاتي :

$\bar{C}ij=Cij-(Ui+Vj)$

وعليه فان

$\bar{C}13=C13-(U1+V3) \qquad \bar{C}13=8-(0+3)=5$

$\bar{C}32=C32-(U3+V2) \qquad \bar{C}32=6-(-2+1)=7$

وبما ان جميع القيم موجب فهذا يعني ان الحل امثل لأنموذج النقل وان الكلفة الكلية تكون

Min Z=2*5+10*1+3*2+11*0+4*3=38

مثال 2: اذا كان لديك جدول الحل الاولي لمشكلة النقل فهل هناك امكانية لتحسين الحل باتجاه النتيجة المثلى بموجب طريقة التوزيع المعدل .

From \ To	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	16 180	20 20	12	200
S2	14	8 100	18 60	160
S3	26	24	16 90	90
DEMAND	180	120	150	450

Min Z = 180*16+20*20+100*8+60*18+90*16=6600

الحل : بما ان الشرط (N+M-1) اي (3+3-1=5) هو عدد الصفوف زائد عدد الاعمدة ناقص واحد يساوي عدد الخلايا المشغولة متحققة فأننا نشرع في ايجاد الحل الامثل وكالاتي .

1- يتم حساب قيم (Ui,Vj) لجميع الخلايا المشغولة (المتغيرات الاساسية) بافتراض ان (U1=0) وفقاً للقانون التالي

$C_{ij}=U_i+V_j$

C11=U1+V1	16=0+v1	V1=16-0=16
C12=U1+V2	20=0+V2	V2=20-0=20
C22=U2+V2	8=U2+20	U2=8-20=-12
C23=U2+V3	18=-12+V3	V3=18+12=30
C33=U3+V3	16=U3+30	U3=16-30=-14

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY	Ui
S1	16 180	20 20	12	200	U1=0
S2	14	8 100	18 60	160	U2=-12
S3	26	24	16 90	90	U3=-14
DEMAND	180	120	150	450	
	V1 =16	V2=20	V3=30		

2- يتم حساب الكلف للخلايا غير المشغولة وفقاً للقانون الاتي :

$$\bar{C}_{ij}=C_{ij}-(U_i+V_j)$$

وعليه فان

$\bar{C}_{13}=C_{13}-(U_1+V_3)$ $\bar{C}_{13}=12-(0+30)=-18$

$\bar{C}_{21}=C_{21}-(U_2+V_1)$ $\bar{C}_{21}=14-(-12+16)=10$

$\bar{C}_{31}=C_{31}-(U_3+V_1)$ $\bar{C}_{31}=26-(-14+16)=24$

$\bar{C}_{32}=C_{32}-(U_3+V_2)$ $\bar{C}_{32}=24-(-14+20)=18$

3- نقوم بتحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج ، وعليه فان المتغير الداخل هو (X13) لان كلفتـه (-18) ، امـا المتغيـر الخـارج فيـتم تحديـده مـن خـلال التعـديل المطلـوب علـى الكميـة المنقولـة لمسـار المتغيـر الـداخل ومـن خـلال طريقة المسار المتعرج وكالاتي :

From \ To	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	16 180	20 -20	12 +	200
S2	14	8 +100	18 -60	160
S3	26	24	16 90	90
DEMAND	180	120	150	450

وعلية فان المتغير الخارج (X12) ولا ضرورة لحساب مسارة في الجدول السابق لتصبح مصفوفة النقل الجديدة بعد تعديل الخلايا بالشكل الاتي

From \ To	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	16 180	20	12 20	200
S2	14	8 120	18 40	160
S3	26	24	16 90	90
DEMAND	180	120	150	450

يتم اعادة نفس الخطوات السابقة على مصفوفة النقل الجديدة ويتم تكرارها لحين التخلص من القيم السالبة ل (Cij) وبمعنى اخر ان قيم (Cij) تكون جميعها اكبر او مساوية للصفر.

يتم حساب قيم (Ui,Vj) مرة ثانية لجميع الخلايا المشغولة (المتغيرات الاساسية) بافتراض ان (U1=0) وفقاً للقانون التالي

$C_{ij}=U_i+V_j$

$C_{11}=U_1+V_1 \qquad 16=0+v_1 \qquad V_1=16-0=16$

$C_{13}=U_1+V_3 \qquad 12=0+V_3 \qquad V_3=12-0=12$

$C23=U2+V3 \qquad 18=U2+12 \qquad U2=18-12=6$

$C22=U2+V2 \qquad 8=6+V2 \qquad V2=8-6=2$

$C33=U3+V3 \qquad 16=U3+12 \qquad U3=16-12=4$

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY	
S1	16 180	20	12 20	200	U1=0
S2	14	8 120	18 40	160	U2=6
S3	26	24	16 90	90	U3=4
DEMAND	180	120	150	450	
	V1=16	V2=2	V3=12		

نقوم بحساب الكلف للخلايا غير المشغولة وفقاً للقانون الاتي :

$\bar{C}ij=Cij-(Ui+Vj)$

وعليه فان

$\bar{C}21 = C21-(U2+V1) \qquad \bar{C}13=14-(6+16)=-8$

$\bar{C}31 = C31-(U3+V1) \qquad \bar{C}31=26-(4+16)= 4$

$\bar{C}32 = C32-(U3+V2) \qquad \bar{C}32=24-(4+2)=18$

نقوم بتحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج ، وعليه فان المتغير الداخل هو (X21) لان كلفته (-8) ، اما المتغير الخارج فيتم تحديده من خلال التعديل المطلوب على الكمية المنقولة لمسار المتغير الداخل ومن خلال طريقة المسار المتعرج وكالاتي :

From \ To	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	16 -180	20	12 +20	200
S2	14 +	8 120	18 -40	160
S3	26	24	16 90	90
DEMAND	180	120	150	450

وعلية فان المتغير الخارج (X23) ولا ضرورة لحساب مسارة في الجدول السابق لتصبح مصفوفة النقل الجديدة بعد تعديل الخلايا بالشكل الاتي

From \ To	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	16 140	20	12 60	200
S2	14 40	8 120	18	160
S3	26	24	16 90	90
DEMAND	180	120	150	450

يتم اعادة نفس الخطوات السابقة على مصفوفة النقل الجديدة

يتم حساب قيم (Ui,Vj) مرة ثانية لجميع الخلايا المشغولة (المتغيرات الاساسية) بافتراض ان (U1=0) وفقاً للقانون التالي

$C_{ij}=U_i+V_j$

$C_{11}=U_1+V_1$ 16=0+v1 V1=16-0=16

$C_{13}=U_1+V_3$ 12=0+V3 V3=12-0=12

$C_{21}=U_2+V_1$ 14=U2+16 U2=14-16=-2

$C_{22}=U_2+V_2$ 8=-2 +V2 V2=8+2=10

$C_{33}=U_3+V_3$ 16=U3+12 U3=16-12=4

To / From	D1	D2	D3	SUPPLY	
S1	16 140	20	12 60	200	U1=0
S2	14 40	8 120	18	160	U2=-2
S3	26	24	16 90	90	U3=4
DEMAND	180	120	150	450	
	V1=16	V2=10	V3=12		

نقوم بحساب الكلف للخلايا غير المشغولة وفقاً للقانون الاتي :

$$\bar{C}_{ij}=C_{ij}-(U_i+V_j)$$

وعليه فان

$\bar{C}_{31}=C_{31}-(U_3+V_1)$ $\qquad$ $\bar{C}_{31}=26-(4+16)=4$

$\bar{C}_{32}=C_{32}-(U_3+V_2)$ $\qquad$ $\bar{C}_{32}=24-(4+10)=10$

وبما ان جميع القيم موجب فهذا يعني ان الحل امثل لأنموذج النقل وان الكلفة الكلية تكون

$$\text{Min } Z=140*16+60*12+40*14+120*8+90*16=5920$$