محاضرات في مادة بحوث العمليات

الكورس الثاني

مدرس المادة : أ.م.د ابراهيم عبدالله جاسم

شبكة الاعمال

لقد كان للثورة الصناعية الكبيرة والتوسع الهائل في حجم المشاريع الامر الذي يجعل من الصعوبة بمكان تنفيذ و متابعة انجازها بأسرع وقت واقل كلفة الأثر الكبير في ظهور شبكة الاعمال

اولاً :مفهوم شبكة الاعمال :

تعتمد شبكة الاعمال في الدرجة الأساس على تجزئة المشاريع الكبيرة الى مجموعة من الأنشطة وكل نشاط له وقت انجاز محدد وان مجموع أوقات هذه الأنشطة تمثل الوقت الكلي لإنجاز المشروع .

ثانياً: اهداف شبكة الاعمال :

1-استخدام الأساليب الكمية من اجل انجاز المشاريع الضخمة باقل وقت ممكن على اعتبار ان الوقت يمثل كلفة فمن المعلوم ان كل مشروع يتكون من عدد من الأنشطة وان كل نشاط يستغرق وقتا معينا لإنجازه.

2-تحديد المدة الزمنية اللازمة لإكمال المشروع .

3-تحديد بدية ونهاية كل نشاط حسب الجدول .

4-تحديد الانشطة الحرجة لإكمالها في الزمن المحدد .

5- تحديد الحد الاقصى الذي يمكننا تأخير بعض الانشطة غير الحرجة بدون ان يؤدي ذلك الى تأخير المشروع .

ثالثاً :مميزات شبكة الاعمال

1-تعد قاعدة يتم الاعتماد عليها في عملية التخطيط والتنبؤ بالمشاريع .

2-تساعد اصحاب المشاريع من تجنب الاخطاء المصاحبة لتنفيذ المشروع .

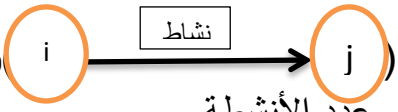
3-تساعد في عملية اتخاذ القرار .

4- استخدام شبكة الاعمال في الجوانب الرقابية .

رابعاً : خطوات وأسس رسم شبكة الاعمال

يمكن تحيد الأسس العامة لرسم شبكة الاعمال والتي تعتبر حجر الأساس في استخراج الوقت الكلي لهذه الأنشطة والذي يمثل الوقت الكلي لإنجاز المشروع :

1- يبدا النشاط بحدث وينتهي بحدث ويكون على شكل دائرة .

2 - كل نشاط يمثل بسهم (

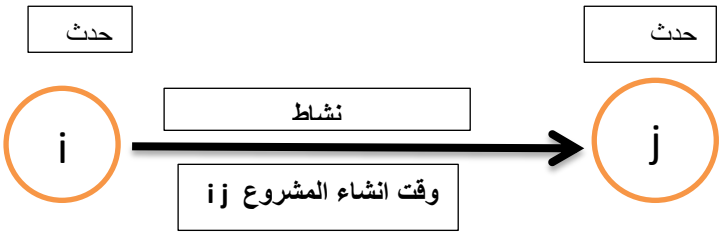
و يجب ان يكون عدد الأسهم في الشبكة مساوي الى عدد الأنشطة

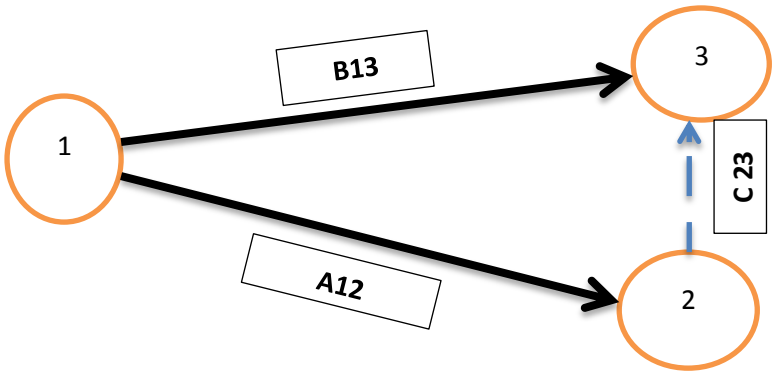
3 - لا يجوز أن يكون لنشاطين لهما نفس البداية والنهاية

4 - طول السهم ليس له علاقة بمدة الإنجاز .

5 - الأنشطة الوهمية والتي ليس لها وقت ولا تستلزم اي مواد (أي ان وقت إنجازها « يساوي صفر) يعبر عنها بسهم متقطع(⟶) لتمييزها عن الأنشطة الحقيقية .

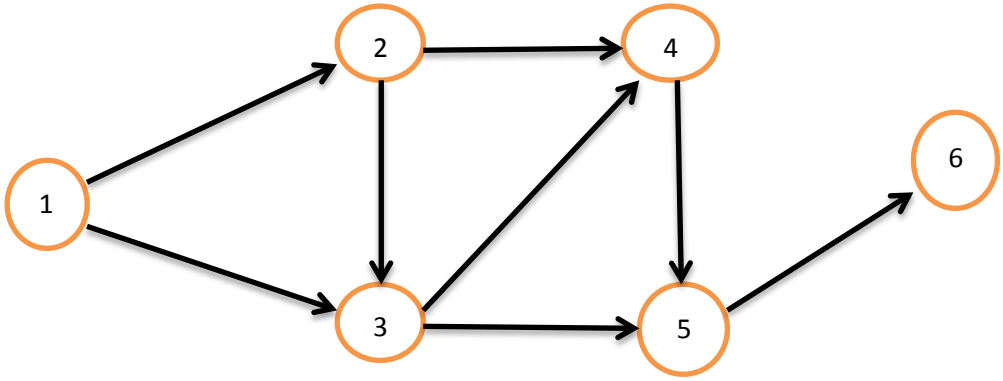
بعض الرسوم والامثلة التوضيحية لشبكة الاعمال





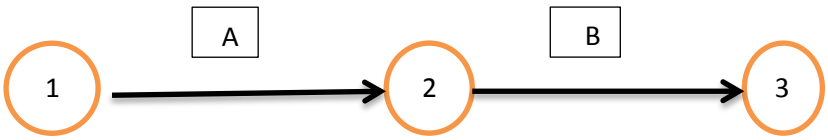
مثال توضيحي لرسم شبكة الاعمال

الانشطة
1-2
1-3
2-3
2-4
3-4
3-5
4-5
5-6



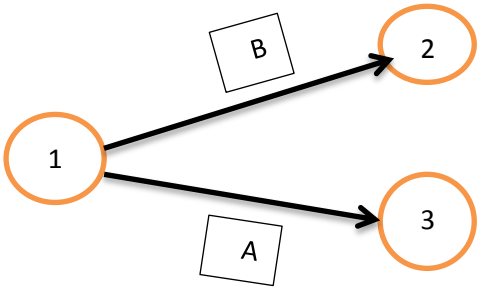
لابد من الإشارة هنا ان شبكة الاعمال تمثل في مجملها مجموعة من الأنشطة المترابطة والمتسلسلة والتي يعتمد بعضها على البعض الاخر حيث لا يمكن ان يبدا النشاط اللاحق من دون أن ينتهي تماما النشاط السابق له مباشرة . وعموماً تنقسم الانشطة الى مجموعتين رئيسيتين هما

1-الانشطة المتعاقبة : وهي الانشطة التي تحدث في ترتيب متعاقب كما في الشكل الاتي



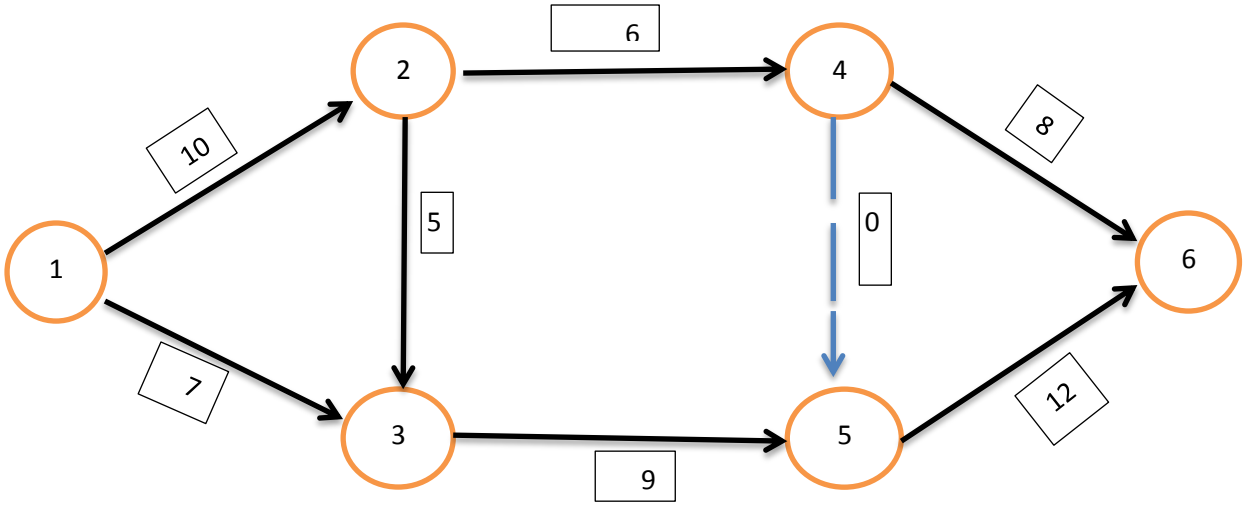
يتضح من الشكل ان النشاط (B) يلحق النشاط (A) وعلى هذا الاساس لا يجوز البدء بتنفيذ النشاط (B) الا بعد انجاز النشاط (A)

2-الانشطة المتوازية : وهي الانشطة التي يتم تنفيذها في نفس الزمن بحيث يتم تنفيذ نشاطين او اكثر في زمن واحد والشكل التي يبين ان النشاط (A) والنشاط (B) ينفذان بنفس الوقت .



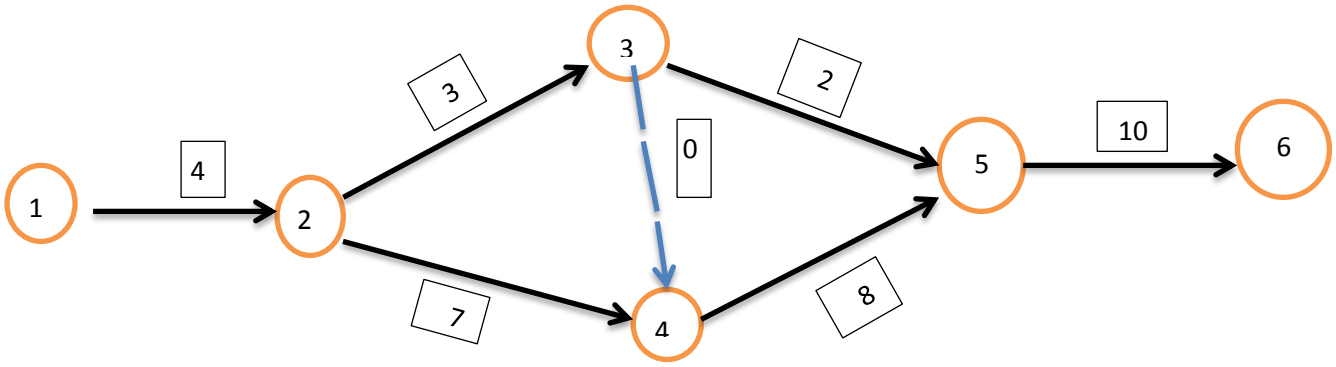
مثال توضيحي

النشاط	الوقت
1-2	10
1-3	7
2-3	5
2-4	6
3-5	9
4-5	0
4-6	8
5-6	12



مثال توضيحي

النشاط	الوقت
1-2	4
2-3	3
2-4	7
3-4	0
3-5	2
4-5	8
5-6	10



تحليل شبكة الاعمال

<u>طرق ايجاد الوقت الكلي لإنجاز المشروع</u>

ان الهدف الاساسي من شبكة الاعمال هو توزيع الانشطة ومتابعة تنفيذها وبالشكل الذي يمكننا من انجاز المشروع باقل وقت ممكن لان الوقت يمثل كلفة وبشكا عام فان يمكن القول بان هناك طريقتان اساسيتان لاستخراج الوقت الكلي لإنجاز المشروع وهما :

1- طريقة المسار الحرج Critical Path Method (cpm)
2- اسلوب تقييم ومراجعة البرامج Progressive Evaluation and Review Techniqul (PERT)

الطريقة الاولى : طريقة المسار الحرج Critical Path Method(CPيعرف المسار الحرج بانه اطول مسار في شبكة الاعمال والذي يبدأ من الحدث الاول وينتهي بالحدث الاخير وعليه يتوقف حساب الوقت الكلي لإنجاز المشروع . وبشكل عام هناك ثلاث طرق لإيجاد المسار الحرج وهي :

1-طريقة اطول مسار.

2-طريقة الاوقات المبكرة والاوقات المتأخرة.

3-طريقة الوقت الفائض .

<u>اولاً : طريقة اطول مسار</u>

تعتمد هذه الطريقة على ايجاد كافة المسارات الممكنة لشبكة الاعمال ومن حدث البداية الى حدث النهاية وفي نفس الوقت يتم حساب الوقت اللازم لكل مسار من خلال جمع اوقات الانشطة الموجودة في ذلك المسار .

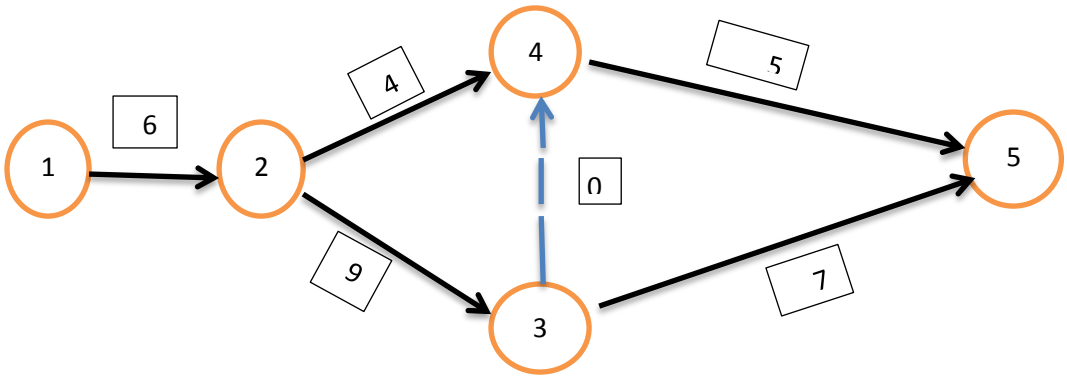
ويعتبر المسار الاطول من حيث الوقت بمثابة المسار الحرج وزمن هذا المسار يمثل اقل وقت ممكن لإنجاز المشروع

وما يميز هذه الطريقة انها سهلة وتطبق عادة في شبكات الاعمال البسيطة وذات الانشطة القليلة في الوقت الذي يصعب فيه ايجاد كافة المسارات الممكنة عندما تكون شبكة الاعمال معقدة وتحتوي على عدد كبير من الانشطة .

مثال : اوجد المسار الحرج والوقت الكلي لإنجاز المشروع للأنشطة التالية .

الانشطة	الوقت
1-2	6
2-3	9
2-4	4
3-4	0
3-5	7
4-5	5

الحل : نقوم اولاً برسم شبكة الاعمال ونضع الاوقات على كل نشاط



نقوم بتحديد المسار واستخراج وقت كل مسار

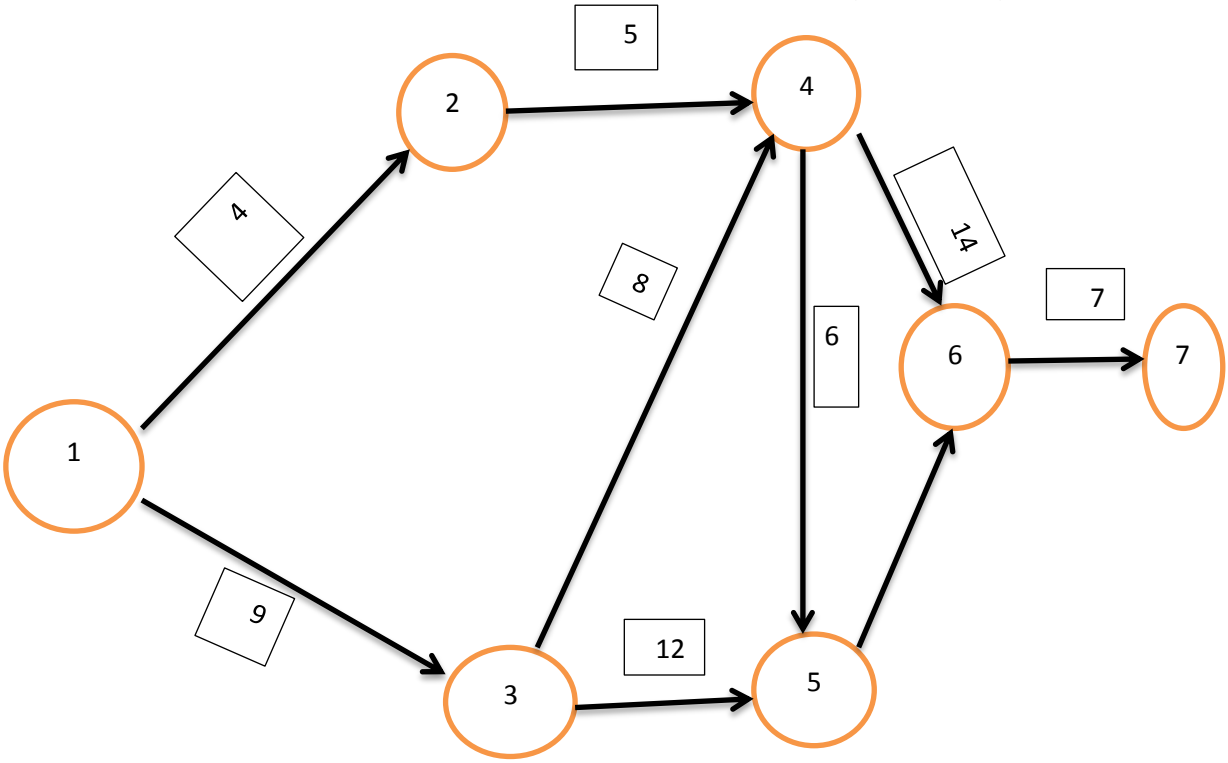
رقم المسار	المسار	الوقت اللازم لإنجاز المسار
1	1 → 2 → 3 → 5	6+9+7=22
2	1 → 2 → 4 → 5	6+4+5=15
3	1 → 2 → 3 → 4 → 5	6+9+0+5=20

المسار الحرج هو مسار رقم واحد لان يحتوي على اعلى وقت وهو (22)

مثال : اوجد المسار الحرج والوقت الكلي لإنجاز المشروع للأنشطة التالية .

الانشطة	الوقت
1-2	4
1-3	9
2-4	5
3-4	8
3-5	12
4-5	6
4-6	14
5-6	3
6-7	7

الحل : نقوم اولاً برسم شبكة الاعمال ونضع الاوقات على كل نشاط



نقوم بتحديد المسار واستخراج وقت كل مسار

رقم المسار	المسار	الوقت اللازم لإنجاز المسار
1	1 2 4 6 7	4+5+14+7=30
2	1 2 4 5 6 7	4+5+6+3+7=25
3	1 3 5 6 7	9+12+3+7=31
4	1 3 4 5 6 7	9+8+6+3+7=33
5	1 3 4 6 7	9+8+14+7=38

المسار الحرج هو المسار رقم (5) لانه يحتوي على اطول وقت وهو (38)

ثانياً: طريقة الاوقات المبكرة والاوقات المتأخرة

عادة ما يتم اللجوء الى هذه الطريقة عندما تكون شبكة الاعمال غاية في التعقيد وعدد الأنشطة فيها كبير جدا بحيث يصعب استخراج كافة مسارات الشبكة من أجل تحديد المسار الأطول والذي يمثل المسار الحرج .

ولغرض إيجاد المسار الحرج والوقت الكلي لإنجاز المشروع بطريقة الأوقات المبكرة والأوقات المتأخرة نتبع الخطوات التالية :

- 1-نرسم شبكة الاعمال مع وضع الأوقات على كل نشاط

2-نحدد الأوقات المبكرة والتي عادة ما يرمز لها بالرمز مربع لكل حدث ابتدأ من بداية المشروع حيث يكون الوقت المبكر صفر ونستمر بشكل متسلسل حتى اخر حدث في المشروع حيث يكون الوقت الكلي لإنجاز المشروع .

3- نحدد الأوقات المتأخرة والتي يرمز لها بالرمز مثلث ويوضع فوق المربع حيث نبدأ من اخر حدث في الشبكة ونضع عليه الرقم الذي انتهى به الوقت المبكر والذي يمثل الوقت الكلي لإنجاز المشروع .

4- يتم تحديد الأوقات المتأخرة لكل حدث من خلال طرح كل حدث من وقت انجاز النشاط من القيمة التي تسبقه وهذا ابتداءاً من اخر حدث نزولا الى الحدث الأول حيث يجب أن يكون مساويا الى الصفر .

5- المحصلة النهائية سوف يصبح لدينا امام كل حدث قيمتين الأولى داخل مربع وتمثل الأوقات المبكرة والثانية داخل مثلث فوق المربع تمثل الأوقات متأخرة ابتدأ من اول حدث حتى اخر حدث في الشبكة.

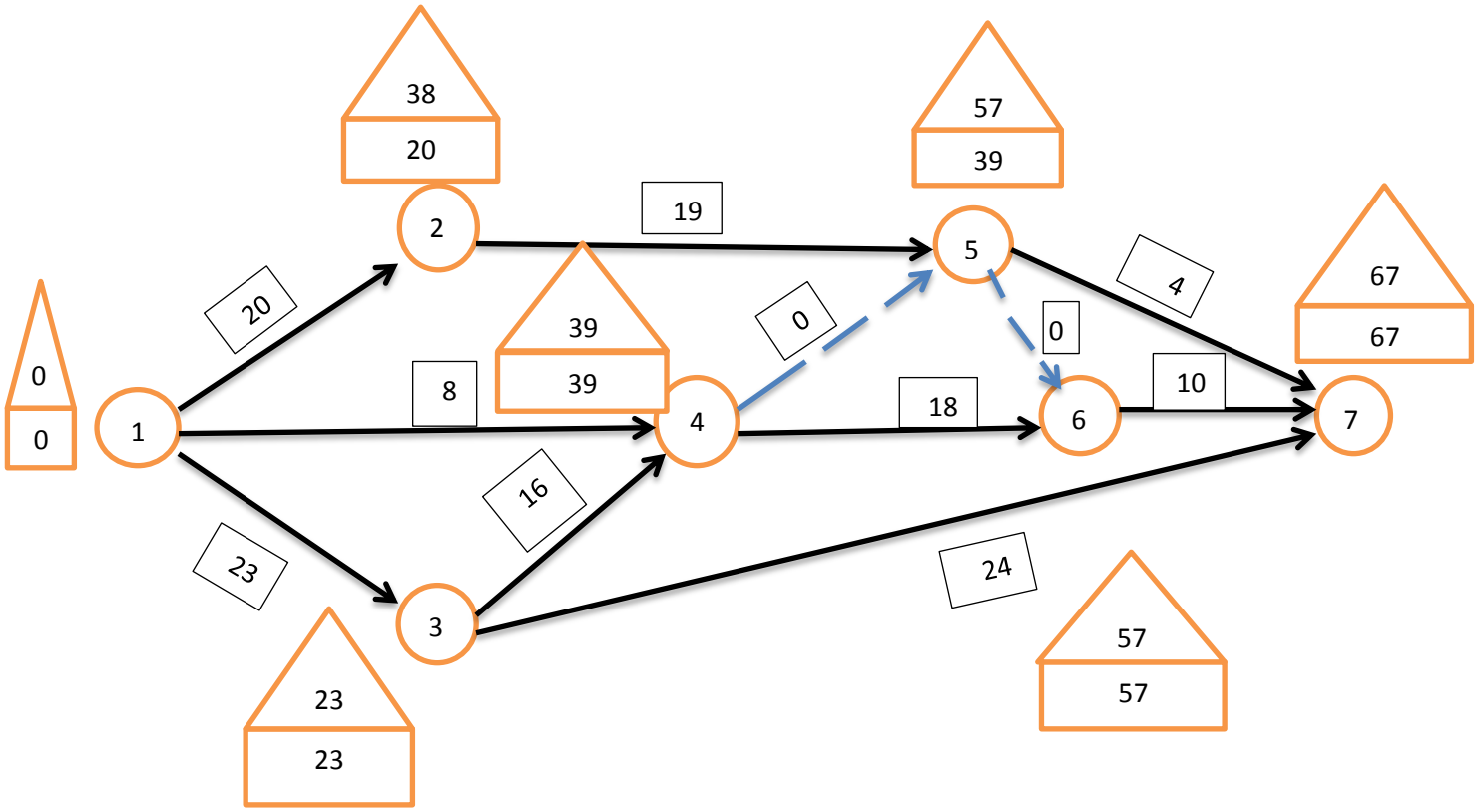
6 - المسار الحرج للشبكة سوف يمر بالأحداث التي تتساوى عندها الأوقات المبكرة مع الأوقات المتأخرة .

7- اما الوقت الكلي لإنجاز المشروع فهو يمثل اخر وقت مبكر لأخر حدث في شبكة الاعمال .

مثال : لشبكة الاعمال التالية استخرج الوقت الكلي لإنجاز المشروع والمسار الحرج باستخدام طريقة الاوقات المبكرة والاوقات المتأخرة .

الانشطة	الوقت
1-2	20
1-3	23
1-4	8
2-5	19
3-4	16
3-7	24
4-5	0
4-6	18
5-6	0
5-7	4
6-7	10

اولاً : نقوم اولاً برسم شبكة الاعمال ونضع الاوقات على كل نشاط



اذا الوقت الكلي لإنجاز المشروع هو =67

المسار الحرج هو المسار الذي تتساوى فيه الاوقات المبكرة مع الاوقات المتأخرة

1 ⟶ 3 ⟶ 4 ⟶ 6 ⟶ 7

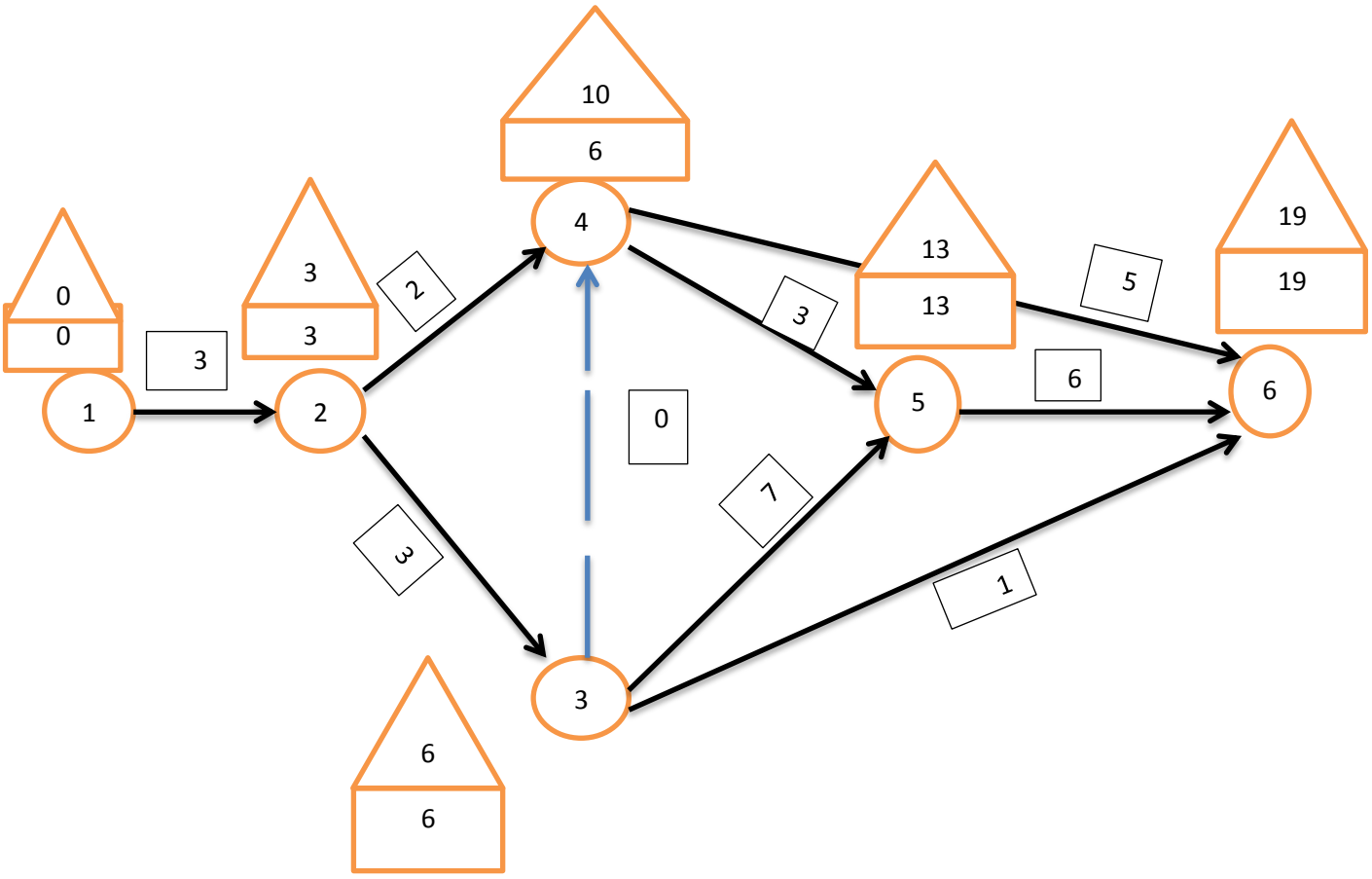
ولغرض التأكد من صحة الحل نقوم بجمع الاوقات الخاصة بالمسار الحرج والتي يجب ان تتساوى مع الوقت الكلي

23+16+18+10=67

مثال : لشبكة الاعمال التالية استخرج الوقت الكلي لإنجاز المشروع والمسار الحرج باستخدام طريقة الاوقات المبكرة والاوقات المتأخرة .

الانشطة	الوقت
1-2	3
2-3	3
2-4	2
3-4	0
3-5	7
4-5	3
3-6	1
4-6	5
5-6	6

اولاً : نقوم اولاً برسم شبكة الاعمال ونضع الاوقات على كل نشاط ثم نستخرج الاوقات المبكرة والاوقات المتأخرة .



اذا الوقت الكلي لإنجاز المشروع هو =19

المسار الحرج هو المسار الذي تتساوى فيه الاوقات المبكرة مع الاوقات المتأخرة

1 ⟶ 2 ⟶ 3 ⟶ 5 ⟶ 6

ولغرض التأكد من صحة الحل نقوم بجمع الاوقات الخاصة بالمسار الحرج والتي يجب ان تتساوى مع الوقت الكلي

3+3+7+6=19

مثال : مثال : لشبكة الاعمال التالية استخرج الوقت الكلي لإنجاز المشروع والمسار الحرج باستخدام طريقة الاوقات المبكرة والاوقات المتأخرة .

الانشطة	الوقت
1-2	4
1-3	9
2-4	5
3-4	8
3-5	12
4-5	6
4-6	14
5-6	3
6-7	7

ثالثا : طريقة الوقت الفائض :

في بعض الأحيان نحتاج إلى معرفة الوقت الفائض في شبكة الاعمال بهدف الاستفادة منه وتسخيره لإنجاز الأنشطة الأخرى المتأخرة وبالشكل الذي يساهم في تقليل الوقت الكلي لإنجاز المشروع . ويعتمد استخراج الوقت الفائض على الطريق الثانية أي ضرورة إيجاد الأوقات المبكرة والاوقات المتأخرة .

ويمكن اتباع الخطوات التالية لغرض استخراج الوقت الفائض :

1- رسم شبكة الاعمال ووضع الأزمنة على كل نشاط .

2 - استخراج الأوقات المبكرة والأوقات المتأخرة .

3 - بناء جدول جديد يحتوي على الأوقات المبكرة والأوقات المتأخرة ووقت الإنجاز .

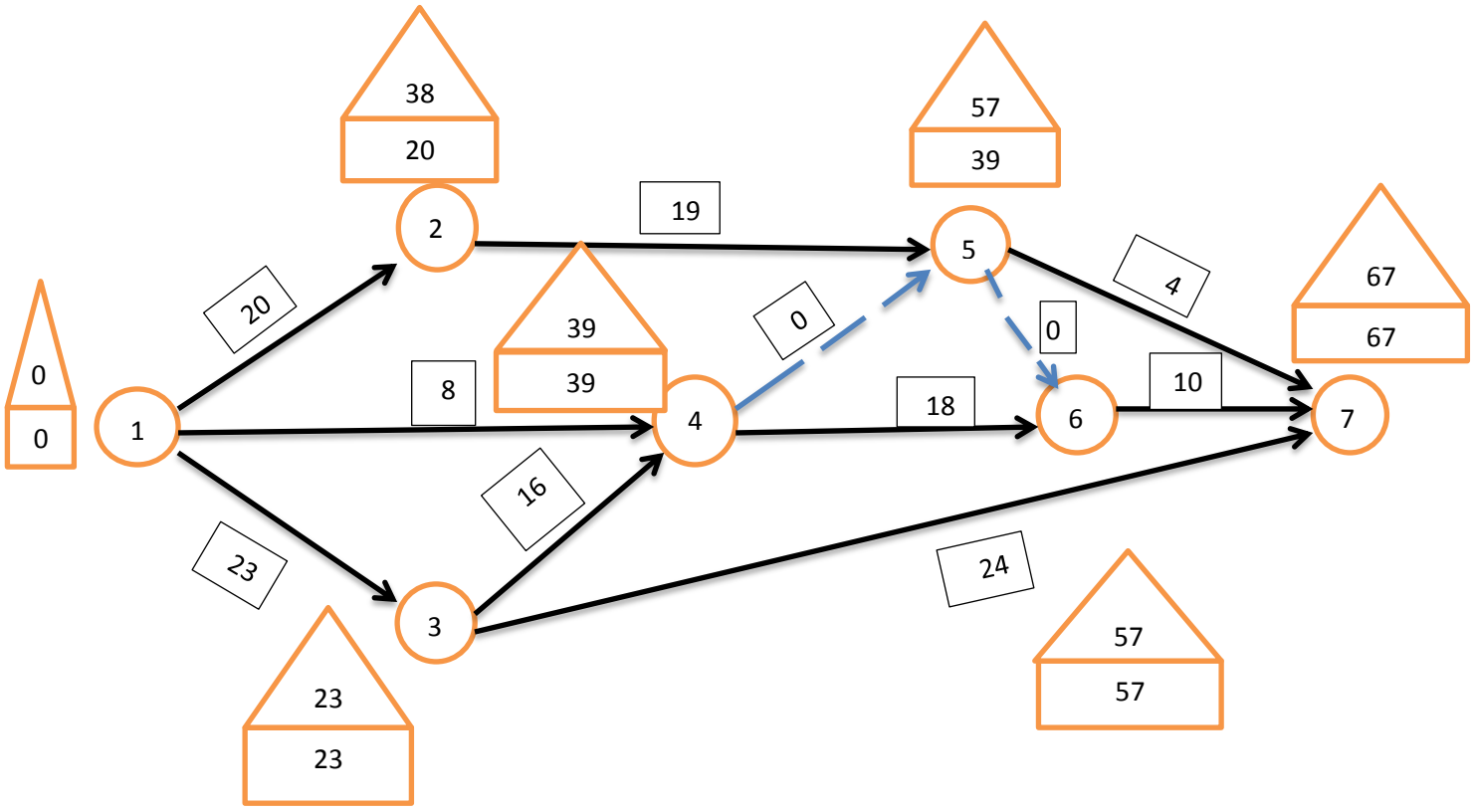
4- يتم استخراج الوقت الفائض وفق المعادلة التالية :

• الوقت الفائض = الوقت المتأخر - (الوقت المبكر + وقت انجاز النشاط)

مثال : لشبكة الاعمال الاتية استخرج الوقت الفائض .

الانشطة	الوقت
1-2	20
1-3	23
1-4	8
2-5	19
3-4	16
3-7	24
4-5	0
4-6	18
5-6	0
5-7	4
6-7	10

اولاً : نقوم اولاً برسم شبكة الاعمال ونضع الاوقات على كل نشاط ونوجد الاوقات المبكرة والمتأخرة .



نقوم بأنشاء جدول جديد يحتوي على الاوقات المبكرة والاوقات المتأخرة ووقت انجاز المشروع بالاعتماد على الرسم البياني ثم نستخرج عامو للوقت الفائض

الانشطة	وقت الانجاز	الوقت المبكر	وقت انجاز النشاط	الوقت المتأخر	الوقت الفائض
1-2	20	0	20	38	18
1-3	23	0	23	23	0
1-4	8	0	8	39	31
2-5	19	20	19	57	18
3-4	16	23	16	39	0
3-7	24	23	24	67	20
4-5	0	39	0	59	20
4-6	18	39	18	57	0
5-6	0	39	0	57	18
5-7	4	39	4	67	24
6-7	10	57	10	67	0

الوقت الفائض = 149 وهو حاصل الاوقات الفائض في العامود الاخير

ملاحظات

1-لايجوز ان يكون الوقت الفائض قيمة سالبة

2-كل نشاط وقته الفائض يساوي صفر هو نشاط حرج وهذا يعني بالإمكان استخراج المسار الحرج من خلال الوقت التالي فان المسار الحرج في المثال السابق هو :

1 ← 3 ← 4 ← 6 ← 7

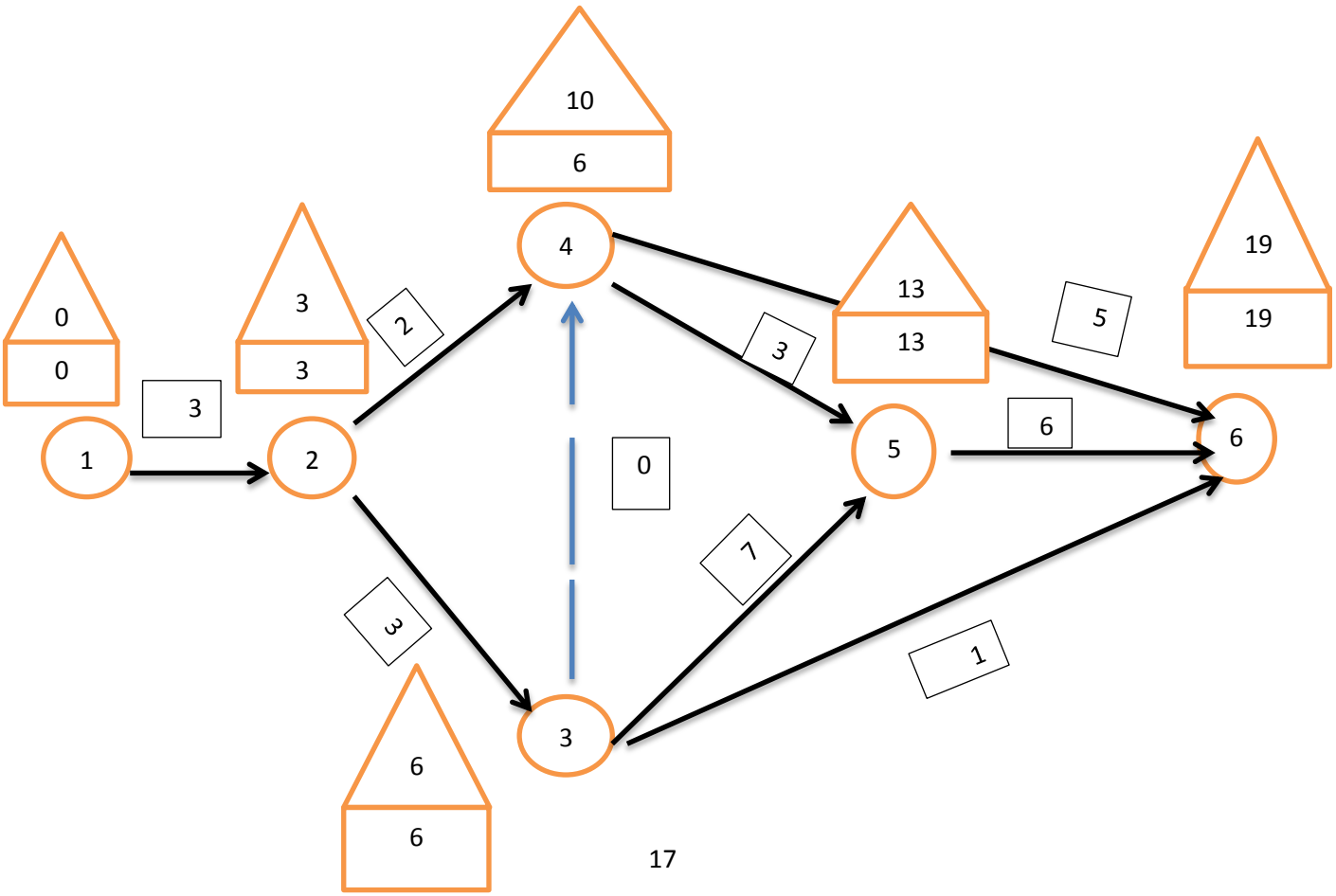
3-ان مجموع اوقات الانشطة الحرجة (التي وقتها الاضافي يساوي صفر) يساوي الوقت الكلي لإنجاز المشروع والذي يساوي (67) اي ان :

23+16+18+10=67

مثال : لشبكة الاعمال الاتية استخرج الوقت الفائض والمسار الحرج والوقت الكلي .

الانشطة	الوقت
1-2	3
2-3	3
2-4	2
3-4	0
3-5	7
4-5	3
3-6	1
4-6	5
5-6	6

اولاً : نقوم اولاً برسم شبكة الاعمال ونضع الاوقات على كل نشاط ثم نستخرج الاوقات المبكرة والاوقات المتأخرة .



نقوم بأنشاء جدول جديد يحتوي على الاوقات المبكرة والاوقات المتأخرة ووقت انجاز المشروع بالاعتماد على الرسم البياني ثم نستخرج عامو للوقت الفائض

الانشطة	وقت الانجاز	الوقت المبكر	وقت انجاز النشاط	الوقت المتأخر	الوقت الفائض
1-2	3	0	3	3	0
2-3	3	3	3	6	0
2-4	2	3	2	10	5
3-4	0	6	0	10	4
3-5	7	6	7	13	0
4-5	3	6	3	13	4
3-6	1	6	1	19	12
4-6	5	6	5	19	8
5-6	6	13	6	19	0

-الوقت الفائض = 33

- كل نشاط وقته الفائض يساوي صفر هو نشاط حرج وهذا يعني ان المسار الحرج هو كلاتي:

1 ← 2 ← 3 ← 5 ← 6

-ان مجموع اوقات الانشطة الحرجة (التي وقتها الاضافي يساوي صفر) يساوي الوقت الكلي لإنجاز المشروع والذي يساوي (19) اي ان :

3+3+7+6=19

مثال : لشبكة الاعمال الاتية استخرج الوقت الفائض والمسار الحرج والوقت الكلي .

الانشطة	الوقت
1-2	3
2-3	3
2-4	2
3-4	0
3-5	3
3-6	2
4-5	7
4-6	5
5-6	6

اسلوب تقييم ومراجعة البرامج (بيرت PERT)

يختلف اسلوب بيرت عن طريقة المسار الحرج باعتماده على ثلاث اوقات مختلفة لإنجاز الانشطة وليس وقت واحد كما هو الحال في المسار الحرج وهذه الاوقات هي

1-الوقت التفاؤلي (a)

وهو اقصر وقت ممكن لإنجاز المشروع عندما تكون الظروف في افضل حالة

2- الوقت الشائع (الاعتيادي) (m)

وهو وقت انجاز النشاط حسب ما مخطط له وفي ضل الظروف الطبيعية وهو الزمن الاكثر واقعية واحتمال لا نجاز النشاط

3-الوقت التشاؤمي (b)

وهو اطول وقت لإنجاز المشروع خصوصا عندما تكون الظروف غير طبيعية ولم يتم التخطيط لها مستقبلا مثل الحالة الجوية واضراب العاملين والحالة الامنية .

ان المشكلة الاساسية التي تواجه عملية احتساب الوقت الكلي لانجاز المشروع وفق اسلوب بيرت تتركز في كيفية تحويل الاوقات الثلاث لكل نشاط الى وقت واحد . ونظراً لان هذه الاوقات تتوزع توزيع بيتا فان الوسط الحسابي سوف يكون حسب الصيغة الاتية : $D = \frac{a+4m+b}{6}$

وهذا يعني لغرض استخراج الوقت الكلي لانجاز المشروع والمسار الحرج والوقت الفائض حسب اسلوب بيرت ينبغي اولا تحويل الاوقات الثلاثة المعطاة في السؤال

الى وقت واحد وحسب الصيغة اعلاه ثم نتبع ذات الخطوات التي كنا نتبعها في طريقة المسار الحرج .

مثال : يتطلب انجاز احد المشاريع الصغيرة القيام بالأنشطة التالية :

الانشطة	a	m	b
1-2	**2**	**4**	6
1-3	**6**	**5**	7
1-4	**6**	**4**	8
2-3	**1**	**5**	6
2-5	**1**	**2**	3
3-5	**4**	**7**	7
4-5	**1**	**2**	3

المطلوب :1- ايجاد الوقت الكلي لإنجاز المشروع

2-ايجاد المسار الحرج .

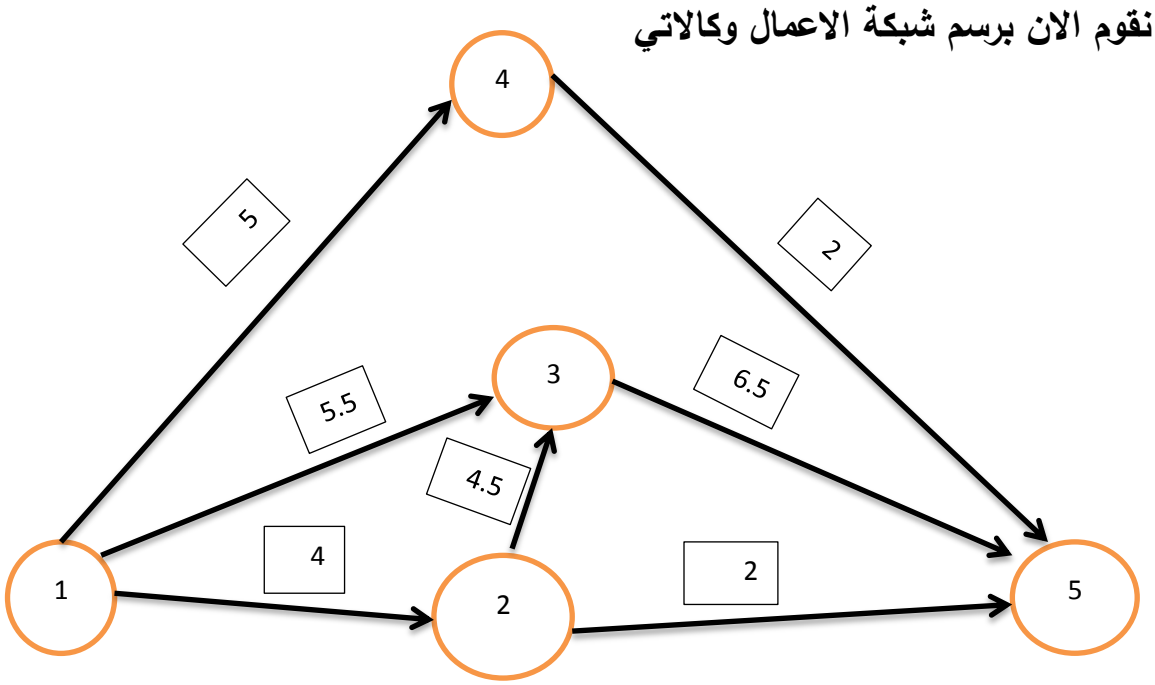
الحل : نقوم بتوحيد الاوقات الثلاث بوقت واحد وحسب الصيغة الاتية

$$D = \frac{a + 4m + b}{6}$$

حيث يصبح جدول الانشطة بالشكل الاتي :

الانشطة	a	m	b	الوقت المتوقع لإنجاز النشاط $D = \frac{a + 4m + b}{6}$
1-2	2	4	6	4
1-3	6	5	7	5.5
1-4	6	4	8	5
2-3	1	5	6	4.5
2-5	1	2	3	2
3-5	4	7	7	6.5
4-5	1	2	3	2

نقوم الان برسم شبكة الاعمال وكالاتي



نقوم بإيجاد الوقت الكلي لإنجاز المشروع والمسار الحرج حسب طريقة اطول مسار وكالاتي

رقم المسار	الانشطة	الوقت المتوقع لكل مسار
1	1 → 2 → 5	4+2=6
2	1 → 2 → 3 → 5	4+4.5+6.5=15
3	1 → 3 → 5	5.5+6.5=12
4	1 → 4 → 5	5+2=7

اذا الوقت الكلي لإنجاز المشروع هو (15)

المسار الحرج هو المسار رقم (2)

مثال :الجدول الاتي يمثل الاوقات المختلفة للازمة لانجاز الانشطة الخاصة بانجاز مشروع ما : المطلوب

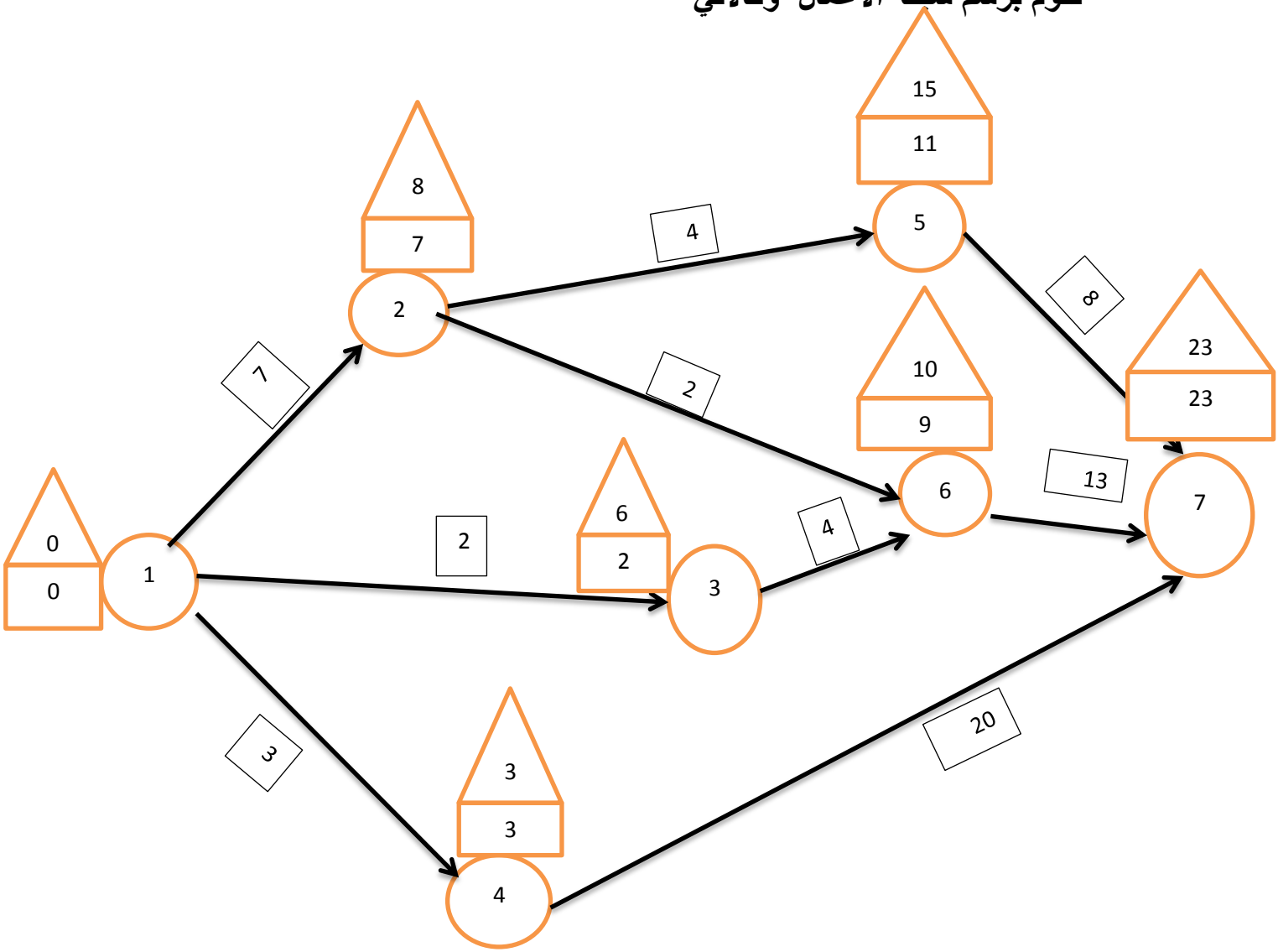
1-استخراج الوقت الكلي لانجاز المشروع

2- استخراج المسار الحرج

3- استخراج الوقت الفائض

الانشطة	a	m	b	الوقت المتوقع لإنجاز النشاط $D = \frac{a + 4m + b}{6}$
1-2	3	6	15	7
1-3	0.5	1	7.5	2
1-4	1	2	9	3
2-5	1	3	11	4
2-6	1	2	3	2
3-6	2	3	10	4
4-7	10	15	50	20
5-7	6	8	10	8
6-7	6	10	32	13

نقوم برسم شبكة الاعمال وكالاتي



اذا الوقت الكلي لإنجاز المشروع هو =23

المسار الحرج هو المسار الذي تتساوى فيه الاوقات المبكرة مع الاوقات المتأخرة

1 ← 4 ← 7

نستخرج الوقت الفائض من خلال أنشاء جدول جديد يحتوي على الاوقات المبكرة والاوقات المتأخرة ووقت انجاز المشروع بالاعتماد على الرسم البياني ثم نستخرج عامود للوقت الفائض وكالاتي :

الوقت الفائض = الوقت المتأخر – (الوقت المبكر + وقت انجاز النشاط)

الانشطة	وقت الانجاز	الوقت المبكر	وقت انجاز النشاط	الوقت المتأخر	الوقت الفائض
1-2	7	0	7	8	1
1-3	2	0	2	6	4
1-4	3	0	3	3	0
2-5	4	7	4	15	4
2-6	2	7	2	10	1
3-6	4	2	4	10	4
4-7	20	3	20	23	0
5-7	8	11	8	23	4
6-7	13	9	13	23	1

الوقت الفائض = 19

مثال : مثال :الجدول الاتي يمثل الاوقات المختلفة للازمة لإنجاز الانشطة الخاصة بإنجاز مشروع ما : المطلوب

1-استخراج الوقت الكلي لإنجاز المشروع

2- استخراج المسار الحرج

3- استخراج الوقت الفائض

الانشطة	a	m	b
1-2	**4**	**6**	8
2-3	**2**	**5**	8
2-4	**3**	**5**	13
3-5	**5**	**8**	11
4-5	**2**	**3**	4
4-6	**1**	**2**	3
5-7	**6**	**9**	12
6-7	**4**	**6**	8

نظرية المباراة (Game Theory)

اولاً: المفهوم والاحتساب

المباراة عبارة عن منافسة بين طرفين او اكثر ولكل طرف من هذه الاطراف مجموعة من الخطط (الاستراتيجيات) من الممكن ان يتبعها من اجل تحقيق اكبر قدر من المكاسب او الارباح وتقليل الخسائر الى اقل قدر ممكن .

ويتم هنا استخدام كلمة (لاعبين) لتدل على وجود طرفين متنافسين لهما مصالح متعارضة مثل الشركات المتنافسة او المصالح الدولية المتعارضة ويحاول كل طرف ايجاد الاستراتيجية المثلى التي من شانها تعظيم الارباح او تقليل الخسائر الى اقل ما يمكن .

ثانياً: تصنيف المباراة

يمكن تصنيف البيئة التنافسية الى عدة اصناف استناداً الى المعايير الاتية :

1-عدد المتنافسين : اذا كان عدد المتنافسين يساوي (2) عندها تسمى المباراة بين شخصين اما اذا كان عدد اللاعبين اكثر من (2) عندها تسمى بمباراة من اللاعبين.

2-من حيث المجموع : اذا كان مقدار الربح الذي يحصل عليه اللاعب الاول يمثل مقدار الخسارة بالنسبة للاعب الثاني سميت المباراة بذات المجموعة الصفرية واذا كان عكس ذلك فان المباراة تسمى بالمباراة ذات المجموعة غير الصفرية .

ثالثاً: مصفوفة الدفع Pay–Off

تمثل مصفوفة الدفع من اهم المفاهيم في نظرية المباراة وهي عبارة عن مجموعة من الصفوف والاعمدة ، الصفوف تمثل عدد الاستراتيجيات التي يتبعها اللاعب الاول (A) ام الاعمدة فتمثل عدد الخطط او الاستراتيجيات التي يتبعها اللاعب الثاني (B) وتحتوي هذه المصفوفة على ارقام موجبة وسالبة وصفر ، الرقم الموجب مقدار الربح الذي يحصل عليه اللاعب الاول (A) وفي نفس الوقت يمثل مقدار الخسارة التي يتحملها اللاعب (B) ، اما الارقام السالبة تمثل ربح للاعب (B) وهي تمثل في نفس الوقت خسارة للاعب (A) ، اما الارقام الصفرية تمثل حالة التعادل بين اللاعبين اي لا غالب ولا مغلوب .

مثال :لمصفوفة الدفع الاتية استخرج نقطة التوازن ان وجدت ثم بين الاستراتيجية المتبعة من قبل اللاعب (A) واللاعب (B)

	B				
A	2	6	-4	0	1
	5	-1	3	2	2
	0	-3	5	-4	0

نلاحظ من المصفوفة

1–المصفوفة هي من الرتبة 5*3

2–اللاعب (A) لدية ثلاث استراتيجيات وهي عدد الصفوف

3- اللاعب (B) لدية خمس استراتيجيات وهي عدد الاعمدة

4-اللاعب (A) دائماً يبدأ في اللعب قبل اللاعب (B)

5- الارقام الموجبة تمثل ربح للاعب (A) وخسارة للاعب (B)

6- الارقام السالبة تمثل ربح للاعب (B) وخسارة للاعب (A)

7-الارقام (0) تمثل حالت التعادل بين اللاعب (A) واللاعب (B)

5-الرقم (2) الذي يقع في الصف الاول والعامود الاول يمثل ربح للاعب (A) اذا اتبع اللاعب (A) الاستراتيجية الاول وايضاً اذا اتبع اللاعب (B) الاستراتيجية الاولى لان الرقم (2) يقع في العامود الاول وهو يمثل الاستراتيجية الاولى للاعب (B) ، اما الرقم (4-) الذي يقع في الصف الاول والعامود الثالث فانه يمثل خسارة للاعب (A) وربح للاعب (B) في حال اتبع اللاعب (A) الاستراتيجية الاولى واللاعب (B) اتبع الاستراتيجية الثالثة .

6-نقطة التوازن وهي النقطة التي يتساوى عندها Max min (A) مع Min max(B) .

اي ان

Max min(A) = Min max(B)

<u>نستخرج Max min(A) وكالاتي</u>

-من كل صف من مصفوفة الدفع نأخذ اقل قيمة.

-من هذه القيم الدنيا التي تم استخراجها نأخذ اعلى قيمة.

نستخرج (B) Min max وكالاتي

-من كل عامود نستخرج اكبر قيمة

-من هذه القيم المستخرجة من الاعمدة الخاصة نأخذ اقل قيمة .

7-اذا تساوت القيمتان المستخرجتان في النقطة السابقة قيل ان لمصفوفة الدفع نقطة توازن وهذا يعني ان امام اللاعب الاول استراتيجية واحدة وامام اللاعب الثاني ايضاً استراتيجية واحدة .

مثال : لمصفوفة الدفع الاتية استخرج نقطة التوازن ان وجدت ثم بين الاستراتيجية المتبعة من قبل اللاعب (A) واللاعب (B)

	B				Min	Max
A	4	7	2	2	2	2
	1	-2	2	5	-2	
	3	1	-3	6	-3	
Max	4	7	2	6		
Min			2			

التعليق على الحل

نقطة التوازن هي (Max Min(A)=Min Max(B)=2)

القيمة (2) هي قيمة موجبة فأنها تمثل ربح يحصل عليه اللاعب (A) اذا لعب الاستراتيجية الاولى واذا لعب اللاعب (B) الاستراتيجية الثالثة .

ملاحظة : اذا كانت هناك نقطة توازن فهذا يعني ان هناك استراتيجية واحدة للاعب (A) و (B)

نقطة التوازن تمثل حالة خاصة اما الحالة العامة هي عدم وجود نقطة توازن واذا لم تكن هناك نقطة توازن فانه يمكن استخراجها بطرق رياضية .

مثال: مثال :لمصفوفة الدفع الاتية استخرج نقطة التوازن ان وجدت ثم بين الاستراتيجية المتبعة من قبل اللاعب (A) واللاعب (B)

	B			Min	Max
A	2	4	0	0	0
	1	-2	-4	-4	
Max	2	4	0		
Min			0		

نقطة التوازن هي (Max Min(A)=Min Max(B)= 0)

القيمة (0) تمثل حالت التعادل بين اللاعب (A) الذي يتبع الاستراتيجية الاولى واللاعب (B) الذي يتبع الاستراتيجية الثالثة

مثال :لمصفوفة الدفع الاتية استخرج نقطة التوازن ان وجدت ثم بين الاستراتيجية المتبعة من قبل اللاعب (A) واللاعب (B)

	B	
A	-2	2
	-3	4
	1	3

مثال :لمصفوفة الدفع الاتية استخرج نقطة التوازن ان وجدت ثم بين الاستراتيجية المتبعة من قبل اللاعب (A) واللاعب (B)

A \ B			
	30	**-10**	**-15**
	15	**5**	**10**

رابعاً : اختزال المصفوفات :

يقصد بعملية الاختزال هو تقليص او تقليل رتبة او درجة المصفوفة من خلال حذف بعض الصفوف او الاعمدة ووفق قواعد محددة والتي يمكن تحديدها بالاتي :

1- **يحذف الصف الذي تكون جميع عناصره اقل او يساوي صف اخر .**
2- **يحذف العامود الذي تكون جميع عناصره اكبر او يساوي عمود اخر.**
3- **الاختزال لايؤثر على نقطة التوازن .**

مثال : اختزل مصفوفة الدفع التالية و ماذا تستنتج
الخطوة الاولى نستخرج نقطة التوازن وكالاتي

		B				Min	Max
A		4	-10	-15	20	-15	
		-3	-18	-7	-4	-18	
		5	-8	3	8	-8	-8
		4	-20	-6	-8	-20	
		-8	-12	-15	-10	-15	
Max		5	-8	3	20		
Min			-8				

- **نقطة التوازن هي (Max Min(A)=Min Max(B)=-8)**
- **القيمة (-8) هي قيمة سالبة فأنها تمثل ربح يحصل عليه اللاعب (B) اذا لعب الاستراتيجية الثانية واذا لعب اللاعب (A) الاستراتيجية الثالثة.**
- **نقوم باختزال المصفوفة وكالاتي :**

A

$$\begin{pmatrix} 4 & -10 & -15 & 20 \\ -3 & -18 & -7 & -4 \\ 5 & -8 & 3 & 8 \\ 4 & -20 & -6 & -8 \\ -8 & -12 & -15 & -10 \end{pmatrix}$$

B

$$\begin{pmatrix} 4 & -10 & -15 & 20 \\ -3 & -18 & -7 & -4 \\ 5 & -8 & 3 & 8 \\ -8 & -12 & -15 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -10 & -15 \\ -3 & -18 & -7 \\ 5 & -8 & 3 \\ -8 & -12 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -10 & -15 \\ -3 & -18 & -7 \\ 5 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -10 & -15 \\ -18 & -7 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -18 & -7 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8 \end{pmatrix}$$

نستنتج من ذلك ان الاختزال لا يؤثر على نقطة التوازن حيث تبقى هذه النقطة مساوية (8-) ولا تتغير في كل مرحلة من مراحل الاختزال وفي اخر مرحلة نحصل على نفس النقطة .

مثال : اختزل مصفوفة الدفع التالية و ماذا تستنتج

	B				Min	Max
A	0	3	7	5	0	
	5	4	6	6	4	4
	3	2	8	-3	-3	
	1	-3	3	2	-3	
Max	5	4	8	6		
Min		4				

- نقطة التوازن هي (Max Min(A)=Min Max(B)=4)
- القيمة (4) هي قيمة موجبة فأنها تمثل ربح يحصل عليه اللاعب (A) اذا لعب الاستراتيجية الثانية واذا لعب اللاعب (B) الاستراتيجية الثانية ايضاً.
- نقوم باختزال المصفوفة وكالاتي :

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 5 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$$

نستنتج من ذلك ان الاختزال لا يؤثر على نقطة التوازن حيث تبقى هذه النقطة مساوية (4) ولا تتغير في كل مرحلة من مراحل الاختزال وفي اخر مرحلة نحصل على نفس النقطة .

الاستراتيجيات المختلطة (عدم وجود نقطة توازن)

عندما توجد نقطة توازن لمصفوفة الدفع فهذا يعني ان امام كلا اللاعبين استراتيجية واحدة ينبغي ان يتبعها كما بينا ذلك في الامثلة السابقة . لكن المشكلة تصبح اكثر تعقيدا عندما لا توجد نقطة توازن .

اي ان :

Max min(A) لا يساوي Min max (B)

وفي هذه الحالة وقبل ان نبدأ باستخراج نقطة التوازن لابد من ملاحظة الامور الاتية :

1- يجب ان يكون Min max (B) اكبر من Max min(A)
2- يجب ان تكون قيمة المباراة (V) محصورة بين Max min(A) و Min max (B)

توجد هناك العديد من الطرق الرياضية لغرض استخراج قيمة المباراة ومعرفة الاستراتيجيات المتبعة من قبل كل لاعب وجميع هذه الطرق تعتمد بالدرجة الاساس على رتبة (درجة) مصفوفة الدفع ومن اهم هذه الطرق والتي سوف نكتفي بها هي:

طريقة الاحتمالات

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون مصفوفة الدفع من الدرجة (2*2) اي امام كل لاعب من اللاعبين استراتيجيتان فقط .وسميت هذه الطريقة بالاحتمالات لأنها تعتمد على توقع اداء اللاعبين فيما يتعلق بالاستراتيجيات المتبعة وليس الاداء الفعلي وعادة ما تكون مجموعة الاحتمالات تساوي واحد وقيمة الاحتمال تكون محصورة بين الصفر والواحد الصحيح .

ولغرض توضيح هذه الطريقة نأخذ المثال الاتي :

مثال: لمصفوفة الدفع الاتية استخرج ما يأتي :

1-قيمة المباراة (V)

2-بين الاستراتيجيات المتبعة من قبل اللاعب (A)

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل :اولاً نتأكد من وجود نقطة توازن

	B		Min	Max
A	3	-2	-2	
	1	4	1	1

Max	3	4
Min	3	

وبما ان قيمة Max min(A) لا تساوي Min max (B) وان Min max (B) قيمة اكبر من قيمة Max min(A) منها فهذا يعني عدم وجود نقطة توازن والمصفوفة من درجة (2*2) نستخدم طريقة الاحتمالات لاستخراج قيمة المباراة. والتي يجب ان تكون محصورة بين (1) و (3) وكالاتي :

		B		
A	P	3	-2	3P+(1)(1-P)=V
	1-P	1	4	-2P+(4) (1-P)=V

3P + 1-P = -2P+4-4P

2P+1 = -6P+4

2P +6P = 4-1

8P=3

P=3/8 = 0.375

1-P = 1- 0.375=0.625

2P+1=V = 2(0.375) + 1 = 1.75

قيمة المباراة وهي قيمة موجبة مما يعني انها تمثل ربح للاعب (A) وخسارة للاعب (B) اما الاستراتيجية المتبعة من قبل اللاعب (A) فهي اكثر من استراتيجية لعدم وجود نقطة توازن والتي كنا نحددها سابقا بالاعتماد على الصف او العامود التي تتواجد فيه قيمة التوازن ، اما الان فان القيمة (1.75) غير موجودة لا في الصف ولا في العامود اذ الاستراتيجية المتبعة من قبل اللاعب (A) للحصول على ربح مقداره (1.75) هي اللعب بالاستراتيجيتين اي يلعب بالصفين فيلعب بالصف الاول(الاستراتيجية الاولى) باحتمالية (0.375) ويلعب بالصف الثاني (الاستراتيجية الثانية) باحتمالية (0.625) ولذلك سميت بالاستراتيجيات المختلطة .

ثانياً : نتأكد من الحل وذلك من خلال قيمة المباراة (1.75) والتي يجب ان تكون محصورة بين (1) و (3) وبما انها تقع بينهما فهذا يعني ان الحل صحيح .